Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences
2018-2019
M1S1 Analyse de Fourier.

Partiel d'analyse de Fourier et distributions tempérées

05/11/18 durée 3h00

On accordera un soin particulier à la clarté des arguments. Dans la suite, $\mathbb{T}$ désignera $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 1-périodique.

1. Vérifier que la fonction φ admet une primitive 1-périodique si et seulement si $\int_0^1 \varphi = 0$.
2. On suppose que $\int_0^1 \varphi = 0$ et on considère une fonction $f \in C^1(\mathbb{T})$ (autrement dit f est une fonction dans $C^1(\mathbb{R})$ qui est 1-périodique). Montrer qu'il existe une constante C, qui dépend de f mais pas de n, telle que pour toute suite $(x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et tout $n \neq 0$ on a :
$$\left| \int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt \right| \leq \frac{C}{n}.$$
3. En déduire que pour toute $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt = 0.$$

Exercice 2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Le but de cet exercice est de prouver un analogue à la formule sommatoire de Poisson dans ce cadre.

1. Pourquoi a-t-on que $f \in L^1(\mathbb{R})$? Montrer que la fonction $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est bien définie, dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ (localement de carré intégrable) et 1-périodique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que l'on a $c_n(F) = \hat{f}(n)$ (on rappelle qu'ici $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$).
3. En déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

Exercice 3. Soit b_n une suite de réels positifs qui décroît vers 0. On souhaite montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(2\pi nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$ si et seulement si $b_n = o(n^{-1})$.

1. Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(2\pi nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$. Pourquoi a-t-on alors que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} b_k sin(2\pi kt) \to 0$ uniformément en t ? On prend en particulier $t = \frac{1}{8n}$. Vérifier que $\sin(2\pi kt) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$. Conclure.
2. Dans l'autre sens, on pose $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} sin(2\pi kt)$.
   (a) Pourquoi est-il suffisant de prouver la convergence uniforme sur $]0, 1/2]$? Montrer que :
   $$S_n(t) = \frac{\cos(\pi t) - \cos((2n+1)\pi t)}{2\sin \pi t}$$
   et en déduire que, sur $]0, 1/2]$, on a :
   $$|S_n(t)| \leq \frac{1}{2t}.$$
   (b) Pour $\varepsilon > 0$, on se donne N tel que $\forall n \geq N,\ nb_n \leq \varepsilon$. Soit $t \in]0, 1/2]$ et $p = E(1/t)$ (E désigne la partie entière). Montrer que
   $$\forall n \geq N,\ \sum_{n+1}^{n+p} b_k \sin(2\pi kt) \leq \sum_{n+1}^{n+p} \varepsilon 2\pi t \leq p\varepsilon 2\pi t \leq 2\pi\varepsilon.$$
   (c) En effectuant une transformation d'Abel, montrer
   $$\sum_{k=n+p+1}^{M} b_k \sin(2\pi kt) = \sum_{k=n+p+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) S_k(t) - b_{n+p+1} S_{n+p}(t) + b_M S_M(t)$$
   et en déduire :
   $$\left| \sum_{k=n+p+1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt) \right| \leq \frac{b_{n+p+1}}{t} \leq \varepsilon$$
   (d) Conclure (brièvement).

Exercice 4. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(t,x) = u(t, x+1), & \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g,\ \partial_t u(0,x) = h & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On choisit $g \in C^4(\mathbb{R})$ et $h \in C^3(\mathbb{R})$, 1-périodiques.

1. Chercher une solution de classe C^2 en t et x de la forme
   $$u(t,x) = \sum_{n\geq 0} a_n(t) \cos(2\pi nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(t) \sin(2\pi nx).$$
   Faîtes attention au cas où $n = 0$!
2. A quelle condition la solution trouvée est-elle bornée en temps (i.e. $t \mapsto \|u(t,.)\|_\infty$ bornée) ?
3. Montrer que l'on peut prendre $g \in C^3(\mathbb{R})$ et $h \in C^2(\mathbb{R})$, 1-périodiques et que l'on a encore une solution.