Université de Picardie Jules Verne — M1S1 Analyse de Fourier
UFR des Sciences

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. On définit la valeur principale de $1/x$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par :

$$\langle v.p(1/x), \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi}{x} dx.$$

1. Montrer que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ peut s'écrire $\psi_1 + x\psi_2$ où ψ_1 est paire et dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et où $\psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut prendre ψ_2 de sorte que $\|\psi_2\|_\infty \leq \|\psi'\|_\infty$.
2. Montrer que la valeur principale de $1/x$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ d'ordre ≤ 1.
3. Montrer que $v.p(1/x)$ n'est pas d'ordre 0. Pour cela, on pourra considérer une suite $\psi_n := 1/n\psi(nx)$ où $\psi \in \mathcal{D}$ a son support dans $]0, 1[$.

Exercice 2.

1. Pour $-2 < \alpha < -1$, montrer que quel que soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :
$$\int_\varepsilon^\infty \psi(x)x^\alpha dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$
où A dépend de ψ, mais pas de ε, et où R_ε tend vers une limite quand $\varepsilon \to 0$.
2. On pose
$$pf(x^\alpha) := lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon$$
Montrer que $pf(x^\alpha)$ est une distribution tempérée d'ordre inférieur ou égal à 1.
3. Montrer enfin que $pf(x^\alpha)$ n'est pas d'ordre 0.

Exercice 3. Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ telle que $T' = 0$. Montrer qu'alors T est constante.

Exercice 4. Montrer que la suite $(n^k \sin nx)$ tend vers 0 au sens des distributions (on justifiera que $n^k \sin nx$ est une distribution tempérée).

Exercice 5. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\langle T, \psi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \psi(x, -x)dx$$

1. Montrer que T est bien définie et d'ordre 0.
2. Déterminer le support de T et en déduire que T n'est pas continue.
3. Calculer $\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}$.

Exercice 6. On considère dans le plan la distribution tempérée définie par la fonction localement intégrable :

$$E(x, t) = 1/2 \text{ si } t - |x| > 0,\ \ 0 \text{ si } t - |x| < 0.$$

On pose $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Calculer $\Box E$.

Exercice 7. Montrer que la fonction $\log |x|$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Quelle est sa dérivée au sens des distributions ?

Exercice 8. Pourquoi a-t-on que les polynômes sont dans $\mathcal{S}'$? Dans $\mathbb{R}$, calculer la transformée de Fourier d'un polynôme P.

Exercice 9. Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée paire est paire.

Exercice 10.
1. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f * g = 0$ est identiquement nulle. Peut-on affirmer que f ou g est nulle ? et si $f = g$?
2. Même question pour $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$.

Exercice 11. Calculer la transformée de Fourier de la fonction d'Heaviside.

Exercice 12. Soit P non nul un polynôme sur $\mathbb{R}^n$. On note $P(\partial)$ l'opérateur différentiel associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'$ vérifie $P(\partial)(u) = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $u = 0$.

Exercice 13. Soient $k > 0$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que $\frac{d^4u}{dx^4} + ku \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $\frac{d^iu}{dx^i} \in L^2$ pour $0 \leq i \leq 4$.

Exercice 14. Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on pose $Du = \frac{1}{2i\pi}\frac{du}{dx}$. On considère l'opérateur : $P_h : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donné par :

$$P_h u = Du + \tau_h u.$$

Déterminer les h tels que P_h est injectif et donner le noyau de P_h dans les autres cas.