Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Déterminer les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

Exercice 2. Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\mathcal{F}(f.g) = 2\pi \hat{\hat{f}} * \hat{g}$.

Exercice 3. On dit qu'une suite de fonctions (ψ_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ converge vers ψ si :

— Pour tout k, $\|\psi_n - \psi\|_{C^k} \to 0$.

— Il existe un compact K tel que $\mathrm{supp}(\psi_n) \overset{\forall k}{\subset} K$ (support captif).

Montrer qu'alors $\psi_n \to \psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 4.

1. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y'' - y = e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

Montrer que (1) admet une solution dans L^2.

2. Même question en remplaçant $e^{-\frac{x^2}{2}}$ par f continue et dans L^2.
3. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$y'' + y = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Quel problème se pose si l'on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Exercice 5 (Sommation de Cesàro)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. considérons la "somme partielle" :

$$S_m f(x) = \int_{-m}^{m} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

1. Montrer que

$$K_M f(x) := \frac{1}{M} \int_0^M S_m f(x) dm = \int_{\mathbb{R}} K_M(x-y) f(y) dy$$

où

$$K_M(x) = \frac{\sin^2(Mx/2)}{M(x/2)^2}.$$

2. Montrer que $K_M \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} K_M(x)dx = 2\pi$ et que pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{M\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} K_M(x) dx = 0.$$

3. En déduire que si f est continue en x_0 on a

$$2\pi f(x_0) = \lim_{M\to\infty} K_M f(x_0)$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $\hat{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si et seulement si $f = 0$.

Exercice 7 (Densité des polynômes orthogonaux)**.** Soit ν une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $e^{-ax} \in L^1(\nu)$. Le but est de montrer qu'alors les polynômes sont denses dans $L^2(\nu)$.

1. Montrer que pour tout n, $x^n \in L^2(\nu)$. Montrer que $L^2(\nu) \subset L^1(\nu)$.
2. Soit $f \in L^2(\nu)$ telle que f est orthogonale à tous les polynômes (dans $L^2(\nu)$. Montrer que la fonction $\psi := 1_{\mathrm{supp}(\nu)}.f$ définit une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\hat{\psi}$ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\{z, \Im z < a/2\}$.
4. Calculer les dérivées successives en 0 de $\hat{\psi}$ et, en utilisant l'unicité du prolongement analytique, en déduire que $\hat{\psi} = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. Conclure.