Université de Picardie Jules Verne — M1S1 Analyse de Fourier
UFR des Sciences

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. On se propose de montrer par l'absurde que l'algèbre $(L^1(\mathbb{R}^d), *)$ n'a pas d'unité. Supposons que u soit une telle une unité.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $\int_U |u| d\lambda \leq 1/2$;
2. Montrer que si V est un voisinage de 0 tel que $V - V \subset U$, on a $1_V * u \neq 1_V$. Conclure

Exercice 2.

1. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue positive. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que $U \subset A - A := \{x - y,\ x \in A,\ y \in A\}$ (Théorème de Steinhaus). Pour cela, montrer que l'on peut se restreindre au cas $\lambda(A) < \infty$ et considérer la fonction $1_A * 1_{-A}$.
2. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{+*}, \times)$ un morphisme de groupe $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) \times f(y))$.
   (a) Montrer que si f est continue alors f est de la forme $x \mapsto e^{ax}$ pour un $a \in \mathbb{R}$.
   (b) On suppose désormais que f est mesurable.
      i. Pour $n \geq 2$, on pose $F_n := \{x \in \mathbb{R}, 1/n < x < n\}$. Montrer qu'il existe $p \geq 2$ tel que $\lambda(F_p) > 0$ et en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon] \subset F_p - F_p$.
      ii. Montrer que pour tout $x \in A_\varepsilon$, on a $1/p^2 < f(x) < p^2$.
      iii. En notant $B_\varepsilon = [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, en déduire que $1_{B_\varepsilon} * (1_{A_\varepsilon} f)$ est continue et non nulle en 0.
      iv. Montrer que pour tout $x \in B_\varepsilon$

$$1_{B_\varepsilon} * (1_{A_\varepsilon} f)(x) = f(x) \int 1_{B_\varepsilon}(y) f(-y).$$

      En déduire que f est continue sur B_ε puis sur $\mathbb{R}$ et conclure.

Exercice 3. Montrer qu'il existe $f \in C^1([0,1])$ qui n'est pas dans l'adhérence de $C_c^1([0,1])$ pour la norme $\|f\|_1 + \|f'\|_1$ (on pourra prendre $f = 1$).