Université de Picardie Jules Verne — 2018-2019
UFR des Sciences — M1S1 Analyse de Fourier

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 (Critère de Weyl)**.** Soit (x_n) une suite de réels de $[0,1]$. Pour tout $]a,b[\subset [0,1]$

$$N_n(a,b) = \#\{0 \leq k \leq n-1,\ x_k \in]a,b[\}$$

On dit que (x_n) est équirépartie modulo 1 si $\forall]a,b[\subset [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a,b)}{n} = b-a.$$

Pour $f \in L^1([0,1])$, on dit que (x_n) vérifie (1) si

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1}$$

1. Montrer qu'une suite équirépartie modulo 1 est dense dans $[0,1]$ (i.e $\overline{\{x_n, n\in\mathbb{N}\}} = [0,1]$). Donner un exemple de suite dense dans $[0,1]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{m-1} \leq k < 2^m$, on pose $y_k = \frac{k-2^{m-1}}{2^{m-1}}$ dans $\mathbb{N}$ (et $y_0 = 0$). Pensez-vous que la suite (y_k) est équirépartie ?
3. Montrer que $(x_n)_n$ est équirépartie si et seulement si (x_n) vérifie (1) pour tout f en escalier.
4. Montrer que $(x_n)_n$ est équirépartie si et seulement si (x_n) vérifie (1) pour tout f continue.
5. Montrer que $(x_n)_n$ est équirépartie si et seulement si (x_n) vérifie (1) pour tout f polynôme trigonométrique.
6. Montrer que $(x_n)_n$ est équirépartie si et seulement si (x_n) vérifie (1) pour tout $f(x) = \exp(i2\pi kx)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$ (critère de Weyl).
7. En déduire que la suite définie par $x_n = n\alpha \mod (1)$ est équirépartie ssi $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
8. Que pensez-vous de la suite $x_n = n^2\alpha$?

Exercice 2. On considère le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0, \forall t>0,\ \forall x\in\mathbb{T} \quad (1) \\ u(0,x) & = u_0(x) \quad (3) \\ u(t,0) & = u(t,1) \text{ et } \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1). \end{cases} \tag{2}$$

En adaptant la preuve du cours à ce cas-là, montrer que si $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, alors il existe une unique solution de (1) et (2) qui soit C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{T}$ et telle que $\lim_{t\to 0} u(t,.) = u_0$ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Exercice 3. On dit que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est ergodique si f est mesurable et :

$$\forall \varphi \in L^2,\ \varphi \circ f \overset{p.p}{=} \varphi \implies \varphi \text{ est constante p.p.}$$

On souhaite montrer que les translations $x \mapsto x + \alpha$ sont ergodiques si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, soit $\varphi \in L^2$. Dans quel sens peut-on décomposer φ en série de Fourier ? Calculer les coefficients de Fourier de $\varphi \circ f$ et conclure.

Montrer de même que $x \mapsto Nx \mod (1)$ est ergodique ($N \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f \in C^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe C telle que :

— $\forall x,\ |f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$

— $\forall x,\ |f'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$

Montrer, en suivant la preuve de la formule sommatoire de Poisson que, pour tout $\lambda \neq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-2i\beta m}{\lambda}} \hat{f}(\frac{n}{\lambda}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$