Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit G un groupe topologique, on rappelle que l'on appelle caractère un morphisme de groupe continu de G dans $\mathbb{C}^*$. On note G^* le groupe des caractères.

1. Montrer que si G est compact, alors tout $g^* \in G^*$ est à valeurs dans $U := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
2. Montrer que tout caractère de $\mathbb{T}$ s'écrit $x \mapsto e^{2i\pi nx}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ (on peut supposer que $e_{\lambda_0} = 1$ est l'un des éléments de la base). Pour tout $e_\lambda \neq 1$, on pose $a_\lambda = 1$ et on pose $a_{\lambda_0} = 0$. Pour $x \in \mathbb{T}$, on écrit $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ où seul un nombre fini de r_λ sont non nuls (pas unique, mais dire comment deux écritures diffèrent) et on pose alors :
$$f(x) = \Pi_{\lambda\in\Lambda} e^{ir_\lambda a_\lambda}.$$
Vérifier que f définit bien un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas continu.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } |x| \geq 1 \\ e^{\frac{-1}{1-x^2}} \text{ sinon.} \end{cases}$$
Montrer que f est C^∞, non nulle, à support compact.

Exercice 3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ alors $f * \nu \in L^1(\mathbb{T})$. Que vaut $\nu * \delta_x$?

Exercice 4. Donner une preuve alternative du Lemme de Riemann-Lebesgue en utilisant les fonctions en escalier.

Exercice 5. Soit μ une mesure positive et $f \in L^1(\mu)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :
$$\forall A,\ \text{borélien},\ \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$
En déduire que s'il existe $g \in L^1(I)$ tel que pour tout x, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ $(a \in I)$ alors f est absolument continue.

Exercice 6. Soit (k_n) un noyau de sommabilité. Alors

1. Soit $1 \leq p < +\infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, montrer que $k_n * f \to f$ dans L^p. Montrer de plus que, si f est continue en x, alors $k_n * f(x) \to f(x)$.
2. Soit $f \in C(\mathbb{T})$, montrer que $k_n * f \to f$ uniformément.

Exercice 7. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est à *variation bornée* s'il existe C telles que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ ($\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ avec $a = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n = b$), on a
$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i+1})| \leq C.$$
On note alors $\mathrm{Var}(f)$ la quantité :
$$\mathrm{Var}(f) := \sup_\sigma \sum_{i=0}^{n-1} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i+1})|$$

1. Montrer qu'une fonction à variation bornée est bornée. Donner un exemple de fonction à variation bornée non continue. Montrer qu'une fonction croissante est à variation bornée.
2. Pour $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, on dit que f est à variation bornée si elle est à variation bornée sur $[0, 1]$. On note $\mathrm{Var}(\mathbb{T})$ l'espace de telles fonctions. Montrer que $\|f\|_\infty + \mathrm{Var}(f)$ est une norme sur $\mathrm{Var}(\mathbb{T})$ (et si on enlève le $\|f\|_\infty$?).

3. Soit f à variation bornée sur I, on considère la fonction ψ qui à x associe la variation de f sur $I_x := [a, x]$. Montrer que ψ est croissante et en déduire que toute fonction à variation bornée s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes.
4. On veut montrer que pour $f \in \mathrm{Var}(\mathbb{T})$, on a pour tout $n \neq 0$, $|2\pi n c_n(f)| \leq \mathrm{Var}(f)$. Pour cela, écrivons $f = f^+ - f^-$ où $f^\pm$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ (mais pas périodiques, pourquoi ?). Montrer, grâce à une approximation de l'identité, que l'on peut se ramener au cas où $f^\pm$ sont C^∞.
5. On suppose donc que $f = f^+ - f^-$ où $f^\pm$ sont C^∞. Montrer que

$$c_n(f) = \int_0^1 f^+(x)e^{-2i\pi nx}dx - \int_0^1 f^-(x)e^{-2i\pi nx}dx = \int_0^1 ((f^+)' - (f^-)')(x)e^{-2i\pi nx}dx$$

et conclure.

Exercice 8. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\int_{\mathbb{T}} |D_n(x)| \geq c \log n$.

Supposons par l'absurde que la famille d'application linéaire $\Lambda_n : f \mapsto S_n(f)(x)$ est uniformément bornée sur $C(\mathbb{T}), \|.\|_\infty$. Montrer que la norme de Λ_n est $\int_{\mathbb{T}} |D_n|$. Arriver à une contradiction en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus et en déduire l'existence d'une fonction continue telle que $S_n(f)$ ne converge pas simplement vers f.

Exercice 9 (Cantor-Lebesque)**.** Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles telle que $\lim_{n\to\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = 0$ pour tout x dans un ensemble de mesure non nul. On veut montrer que $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$.

(1) Montrer que l'on peut écrire $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \delta_n \sin(n(x - x_n))$ où l'on determinera δ_n. En déduire qu'il est équivalent de montrer que $\delta_n \to 0$.

(2) On se fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $N > 0$ tel que $X_N := \{x \in [0, 2\pi],\ \forall n \geq N, |\delta_n \sin(n(x - x_n))| \leq \varepsilon\}$ est de mesure non nulle.

(3) Montrer que :

$$\int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))|dx \geq \int_{X_N} \sin^2(n(x - x_n))dx = 1/2|X_N| - 1/2 \int_{X_N} \cos(2n(x - x_n))dx.$$

Pourquoi cette dernière intégrale tend-elle vers 0 ? En déduire $\int_{X_N} |\sin(n(x - x_n))|dx \geq 1/4|X_N|$ puis $|\delta_n| \leq 4\varepsilon$.

(4) Montrer de la même manière le Théorème de Denjoy-Lusin : si l'ensemble des $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est absolument convergente a une mesure non nulle alors $\sum_n |a_n| + |b_n| < +\infty$ (on considérera l'ensemble $X_N := \{x \in [0, 2\pi],\ \sum_{n\geq N} |\delta_n \sin(n(x - x_n))| \leq 1\}$).

Exercice 10 (Phénomène de Gibbs)**.** Considérons le comportement des sommes partielles $S_N f(x)$ au voisinage de zéro de la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = -(\pi + x)1_{]-\pi,0[} + (\pi - x)1_{]0,\pi[}(x).$$

(1) Trouver la série de Fourier de f.

(2) Montrer que

$$(S_N f)'(x) = D_N(x) - 1$$

et en déduire que

$$S_N f(x) = -x + \int_0^x \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin(t/2)}dt.$$

(3) Soit $g(t) = 1/\sin(t/2) - 2/t$. Montrer que $g \in C^1([0, \pi])$ et puis que

$$\int_0^x g(t) \sin(N + 1/2)tdt = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{quand } N \to \infty$$

uniformément en $x \in [0, \pi]$, et que

$$S_N f(x) = -x + 2\int_0^x \frac{\sin(N + 1/2)t}{t}dt + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{quand } N \to \infty$$

uniformément en $x \in [0, \pi]$.

(4) Déduire de (3) que si $0 < x < \pi$, $\lim_N S_N f(x) = f(x)$.

(5) Déduire de (3) que

$$\sup_{0\leq x\leq\pi} [S_N f(x) + x] \leq 2 \sup_{0\leq u<\infty} S(u) + O(1/N) = 2S(\pi) + O(1/N)$$

oú $S : x \mapsto \int_0^x S(t)dt$. Alors quelque soit $0 \leq x_N \leq \pi$, on a $\limsup S_N f(x_N) \leq 2S(\pi)$.

(6) Montrer que si $x_N \to 0$ et que $Nx_N \to \pi$, on a $\lim_N S_N f(x_N) = 2S(\pi)$.

(7) En déduire que tout point de $[0, 2S(\pi)]$ est un point d'accumulation d'une suite de sommes partielles $S_N f(x_N)$, avec $x_N \to 0$.

Exercice 11. Soit h_α la fonction 2π-périodique définie par

$$h_\alpha(\theta) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} e^{i\alpha(\pi-\theta)}$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$ où $0 < \alpha < 1$. Montrer que :

$$h_\alpha(\theta) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\theta}}{n+\alpha}.$$

Etudier la convergence simple de cette série. Trouver de jolies formules.

Exercice 12. (Noyau de Poisson) Soit $r < 1$. Montrer que le noyau de Poisson défini par :

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

s'écrit comme

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

Montrer que l'on a un noyau de sommabilité quand $r \to 1$ (cf exercice précédent).

Exercice 13. Discuter la convergence de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Discuter aussi la continuité des fonctions définies par ces séries.

Exercice 14 (Série trigonométrique non-Fourier)**.** On considère une suite (a_n) de réels positifs décroissants vers zéro, et la série trigonométrique associée

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

On va démontrer que la somme g de cette série de sinus est Lebesgue intégrable si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) \log n < \infty.$$

On introduit le noyau de Dirichlet conjugué défini par

$$\tilde{D}_N(x) = -i \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{Sign}(n) e^{inx} = 2\sum_{n=1}^{N} \sin nx$$

où $\mathrm{Sign}(n) = -1, 0$ ou 1 selon $n < 0, n = 0$ ou $n > 0$, et le noyau de Dirichlet conjugué modifié défini par

$$\tilde{D}_N^*(x) = \tilde{D}_N(x) - \sin Nx.$$

(1) Montrer que

$$\tilde{D}_N(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \tilde{D}_N^*(x) = \frac{1-\cos Nx}{\tan\frac{x}{2}}.$$

(2) Montrer que $\tilde{D}_N^*(x)$ est impaire et que $0 \leq \tilde{D}_N^*(x) \leq \frac{C}{x}$ pour $0 < x \leq \pi$ où C est une constante, et que

$$\int_0^\pi \tilde{D}_N^*(x)dx \sim \int_0^\pi \tilde{D}_N(x)dx \sim \log N \quad (N \to \infty).$$

(3) Soit $T_n(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kx$. Montrer que

$$2T_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1})\tilde{D}_k(x) + a_N \tilde{D}_N(x)$$

et en déduire que

$$2g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\tilde{D}_n(x).$$

(4) Montrer que $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \sin nx$ est une fonction continue et que $2g = g^* + h$ où g^* est la fonction négative :

$$g^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})\tilde{D}_n^*(x).$$

(5) Montrer que g^* est Lebesgue intégrable si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \log n < \infty$.
(6) Conclusion : g est Lebesgue intégrable si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \log n < \infty$.
(7) Examiner l'intégrabilité des fonctions suivantes

$$L(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}, \qquad L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

(8) Montrer que $L_\alpha(x)$ n'est pas bornée si $0 < \alpha < 1$, mais $L_1(x)$ est bornée.

Exercice 15. Sot (f_n) une suite bornée sur $H^1(\mathbb{T})$. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\mathbb{T})$ vers $f \in H^1(\mathbb{T})$ (Théorème de Rellich). Pour cela, on pourra commencer par utiliser un argument d'extraction diagonale pour construire une sous-suite telle que $(\int f_n e_k)_n$ converge pour tout $k \in \mathbb{Z}$.