Corrigé du partiel d'analyse de Fourier et distributions tempérées

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 1-périodique.

1. Si φ admet une primitive 1-périodique notée Ψ, alors $\Psi(1) = \Psi(0)$ et par le théorème fondamental de l'analyse : $\Psi(1) = \int_0^1 \varphi(t)dt + \Psi(0)$ ce qui donne le premier sens. Dans l'autre sens, on prend la primitive $\Psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ et on a $\Psi(x+1) - \Psi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)dt$. On pose $t = E(x) + u$ où $E(x)$ est la partie entière de x et $u \in [0, 1[$. On a alors, comme φ est 1-périodique

$$\begin{aligned}
\Psi(x+1) - \Psi(x) &= \int_{x-E(x)}^{x+1-E(x)} \varphi(E(x)+u)du \\
&= \int_{x-E(x)}^{x+1-E(x)} \varphi(u)du \\
&= \int_{x-E(x)}^{0} \varphi(u)du + \int_0^1 \varphi(u)du + \int_1^{x+1-E(x)} \varphi(u)du.
\end{aligned}$$

Or, $\int_1^{x+1-E(x)} \varphi(u)du = \int_0^{x-E(x)} \varphi(u)du$ par 1-périodicité et $\int_0^1 \varphi(u)du = 0$ par hypothèse. On en déduit bien que $\Psi(x+1) = \Psi(x)$.

2. Soit f comme dans l'énoncé et $n \neq 0$. Soit Ψ une primitive 1-périodique de ψ (qui existe par ce que l'on vient de faire). Alors, par intégration par partie :

$$\int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt = \left[f(t)\frac{\Psi(nt - x_n)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{\Psi(nt - x_n)}{n}dt.$$

Le terme crochet est nul par périodicité et par inégalité triangulaire dans l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt\right| \leq \int_0^1 \left|f'(t)\frac{\Psi(nt - x_n)}{n}\right| dt \leq \|\Psi\|_\infty \frac{\int_0^1 |f'(t)|\, dt}{n}.$$

On en déduit le résultat demandé avec $C = \|\Psi\|_\infty \int_0^1 |f'(t)|\, dt$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère, par densité de $C^1(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$, une fonction $g \in C^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt\right| &\leq \left|\int_0^1 (f(t) - g(t))\varphi(nt - x_n)dt\right| + \left|\int_0^1 g(t)\varphi(nt - x_n)dt\right| \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt + \left|\int_0^1 g(t)\varphi(nt - x_n)dt\right|
\end{aligned}$$

Le premier terme est $\leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon$ et le deuxième tend vers 0 quand $n \to \infty$ par le 2. Il est donc $\leq \varepsilon$ pour n assez grand. On a donc que $\left|\int_0^1 f(t)\varphi(nt - x_n)dt\right| \leq (1 + \|\varphi\|_\infty)\varepsilon$ pour n assez grand. Le résultat suit de ce que ε est arbitraire.

Exercice 2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact.

1. Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset [-M, M]$ alors $f \in L^1([-M, M])$ car $L^2([-M, M]) \subset L^1([-M, M])$ et donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction F est bien définie car dans la somme il n'y a qu'un nombre fini de terme non nulle : pour $x \in [-N, N]$, on a que $f(x + n) = 0$ pour $|n| > N + M$ ($|x + n| \geq |n| - |x| > N + M - N \geq M$). On a alors sur $[-N, N]$:
$$F(x) = \sum_{-(N+M)}^{N+M} f(x + n)$$
d'où :
$$|F(x)|^2 \leq \left(\sum_{-(N+M)}^{N+M} |f(x + n)|\right)^2 \leq (2(N + M))^2 \sum_{-(N+M)}^{N+M} (|f(x + n)|)^2$$
qui est donc de carré intégrable comme somme finie de fonctions de carré intégrable (sur $[-N, N]$). La fonction F est 1-périodique en réindexant (il s'agit de sommes finies !).
2. Les coefficients de Fourier de F sont bien définis puisque F est dans L^1 et est 1-périodique. On a alors :
$$c_n(F) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}dx = \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + m)e^{-2i\pi nx}dx$$
On peut intervertir la somme et l'intégrale puisque la somme est sur un nombre fini de termes (uniformément sur $[0, 1]$, on peut aussi utiliser le fait que F est dans $L^1([0, 1])$) :
$$c_n(F) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x + m)e^{-2i\pi nx}dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x)e^{-2i\pi nx}dx$$
où on a utilisé que $e^{-2i\pi n(x-m)} = e^{-2i\pi nx}$. On reconnaît (il s'agit encore d'une somme finie) :
$$c_n(F) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi nx}dx = \hat{f}(n).$$
3. La fonction F est dans $L^2(\mathbb{T})$; elle est donc égale à sa série de Fourier dans L^2 et donc presque partout $F(x) \overset{p.p}{=} \sum_{\mathbb{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx}$. On reconnaît
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + n) \overset{p.p}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

Exercice 3. Soit b_n une suite de réels positifs qui décroît vers 0. On souhaite montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(2\pi nt)$ converge uniformément sur $\mathbb{T}$ si et seulement si $b_n = o(n^{-1})$.

1. On a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(2\pi kt) \to 0$ uniformément en t par le critère de Cauchy d'une série uniformément convergente. Pour $t = \frac{1}{8n}$ et $n+1 \leq k \leq 2n$, on a
$$\frac{2\pi(n+1)}{8n} \leq 2\pi kt \leq \frac{4\pi n}{8n}$$
donc
$$\frac{\pi}{4} \leq 2\pi kt \leq \frac{\pi}{2}$$
et en particulier $\sin(2\pi kt) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$. On a alors, par décroissance de (b_k) :
$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(2\pi kt) \geq nb_{2n}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
et donc $nb_{2n} \to 0$. On en déduit le résultat pour les n pairs et donc pour les n impairs par décroissance ($(n+1)b_{n+1} \leq (n+1)b_n \leq 2nb_n \to 0$).
2. On pose $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi kt)$.
   (a) Par périodicité, il suffit de prouver la convergence uniforme sur $[-1/2, 1/2]$ et par imparité (le sinus est impair) on peut se restreindre à $[0, 1/2]$. Enfin, en 0 la convergence est uniforme car tous les termes sont nuls. Il est donc suffisant de prouver la convergence uniforme sur $]0, 1/2]$.
   On calcule ($t \neq 0$ donc la raison est $\neq 1$) avec les formules d'Euler :
$$\begin{aligned} S_n(t) &= \Im\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2\pi kt}\right) = \Im\left(\frac{e^{2i\pi t} - e^{2i\pi(n+1)t}}{1 - e^{2i\pi t}}\right) = \Im\left(\frac{e^{i\pi t} - e^{i\pi(2n+1)t}}{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}}\right) \\ &= \Im\left(\frac{e^{i\pi t} - e^{i\pi(2n+1)t}}{-2i\sin(\pi t)}\right) = \Re\left(\frac{e^{i\pi t} - e^{i\pi(2n+1)t}}{2\sin(\pi t)}\right) \\ &= \frac{\cos(\pi t) - \cos((2n+1)\pi t)}{2\sin \pi t}. \end{aligned}$$
   Par concavité, on a que $\sin \pi t \geq 2t$ sur $]0, 1/2]$, en majorant $|\cos(\pi t) - \cos((2n+1)\pi t)| \leq 2$, on en déduit l'inégalité
$$|S_n(t)| \leq \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t}.$$
   (b) On prend les notations de l'énoncé. Alors :
$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} b_k \sin(2\pi kt)\right| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \left|\frac{\varepsilon}{k}\sin(2\pi kt)\right| \leq \sum_{n+1}^{n+p} \left|\frac{\varepsilon}{k}2\pi kt\right| \leq p\varepsilon 2\pi t \leq 2\pi\varepsilon$$
   puisque $p \leq 1/t$.

(c) On effectue une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+p+1}^{M} b_k \sin(2\pi kt) &= \sum_{k=n+p+1}^{M} b_k(S_k(t) - S_{k-1}(t)) \\
&= \sum_{k=n+p+1}^{M} b_k S_k(t) - \sum_{k=n+p+1}^{M} b_k S_{k-1}(t) \\
&= \sum_{k=n+p+1}^{M} b_k S_k(t) - \sum_{k=n+p}^{M-1} b_{k+1} S_k(t) \\
&= \sum_{k=n+p+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) S_k(t) - b_{n+p+1} S_{n+p}(t) + b_M S_M(t)
\end{aligned}$$

On prend la valeur absolue et on majore ($b_k - b_{k+1} = |b_k - b_{k+1}|$ puisque la suite est décroissante et on utilise $|S_n(t)| \leq \frac{1}{2t}$) :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+p+1}^{M} b_k \sin(2\pi kt)\right| &\leq \sum_{k=n+p+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1})|S_k(t)| + |b_{n+p+1} S_{n+p}(t)| + |b_M S_M(t)| \\
&\leq \sum_{k=n+p+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \frac{1}{2t} + b_{n+p+1} \frac{1}{2t} + b_M \frac{1}{2t} \\
&\leq 2b_{n+p+1} \frac{1}{2t}
\end{aligned}$$

On fait tendre $M \to \infty$:

$$\left|\sum_{k=n+p+1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt)\right| \leq \frac{2b_{n+p+1}}{t} \leq \frac{2\varepsilon}{2t(n+p+1)} \leq \frac{\varepsilon}{t(p+1)}.$$

Or, $1/t \leq p+1$ et le résultat suit.

(d) On prend $\varepsilon > 0$, alors pour N assez grand on a $nb_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. On a alors pour tout t en combinant b) et c) que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt)\right| \leq \left|\sum_{n+1}^{n+p} b_k \sin(2\pi kt)\right| + \left|\sum_{k=n+p+1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt)\right| \leq 2\pi\varepsilon + \varepsilon$$

on a donc convergence uniforme par le critère de Cauchy de la convergence uniforme.

Exercice 4. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases}
\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\
u(t,x) = u(t,x+1), & \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\
u(0,x) = g,\ \partial_t u(0,x) = h & \text{pour } x \in \mathbb{R}
\end{cases}$$

On choisit $g \in C^4(\mathbb{R})$ et $h \in C^3(\mathbb{R})$, 1-périodiques.

1. On cherche une solution

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 0} a_n(t)\cos(2\pi nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(t)\sin(2\pi nx)$$

et on suppose que l'on peut différencier dans l'intégrale autant que nécessaire. On a alors :

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \sum_{n\geq 0}(a_n''(t) + (2\pi n)^2 a_n(t))\cos(2\pi nx) + \sum_{n\geq 1}(b_n''(t) + (2\pi n)^2 b_n(t))\sin(2\pi nx)$$

On en déduit que pour tout n on a :

$$a_n''(t) + (2\pi n)^2 a_n(t) = 0 \text{ et } b_n''(t) + (2\pi n)^2 b_n(t) = 0$$

On a alors, pour $n \neq 0$, que $a_n(t) = \alpha_n \cos(2\pi nt) + \beta_n \sin(2\pi nt)$ avec α_n et β_n des constantes et $a_0(t) = At + B$ (A et B des constantes). De même, on a pour $n \neq 0$, que $b_n(t) = \gamma_n \cos(2\pi nt) + \delta_n \sin(2\pi nt)$ avec γ_n et δ_n des constantes. En utilisant les conditions initiales, on a alors
— $B = a_0(g)$, $A = a_0(h)$.
— pour $n \neq 0$, $\alpha_n = a_n(g)$, $\gamma_n = b_n(g)$.
— pour $n \neq 0$, $\beta_n = \frac{1}{2\pi n} a_n(h)$, $\delta_n = \frac{1}{2\pi n} b_n(h)$.
On doit maintenant vérifier que u ainsi définie est C^2 et est solution du problème considéré. Observons pour cela que $a_n(g)$ et $b_n(g)$ sont des $O(n^{-4})$ puisque g est C^4. De même, $a_n(h)$ et $b_n(h)$ sont des $O(n^{-3})$. En particulier, les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n sont des $O(n^{-4})$.
On a alors facilement que u est C^2 puisque lorsque l'on dérive au plus deux fois en x ou t on fait apparaître des termes en n^2 et la série des n^{-2} est sommable. Par construction, on a alors bien une solution du problème.

2. La solution u s'écrit

$$a_0(h)t + a_0(g) + v(t,x)$$

où $v(t,x)$ est donnée par

$$\sum_{n\geq 1}(\alpha_n \cos(2\pi nt) + \beta_n \sin(2\pi nt))\cos(2\pi nx) + (\gamma_n \cos(2\pi nt) + \delta_n \sin(2\pi nt))\sin(2\pi nx).$$

La fonction $t \mapsto \|v(t,.)\|_\infty$ est bornée puisque les séries des $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n sont sommables. On voit qu'alors u est uniformément bornée en temps si et seulement si $a_0(h) = 0$, autrement dit $\int_{\mathbb{T}} h = 0$.

3. On voit qu'alors les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n sont de la forme un $O(n^{-3})$ fois une suite de carré sommable. ce qui est suffisant pour nos besoins.