Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny M1S1 Analyse de Fourier

Espaces de Sobolev

1 Définition

1.1 Motivation

On cherche à résoudre l'équation $f - \Delta f = u$ sur $\mathbb{R}^d$ où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est fixée et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On considère $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on multiplie par g et on intègre :

$$\int fg - \int \Delta f g = \int gu.$$

Il est équivalent d'avoir f solution et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\int fg - \int \Delta f g = \int gu$ pour tout g. Par Stokes (en supposant $g \in C^1$), on reconnaît alors :

$$\int fg + \int \nabla f . \nabla g = \int gu.$$

Le terme de droite définit une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par Cauchy Schwarz. Le terme de gauche définit lui une forme linéaire continue sur ... les fonctions de L^2 à dérivées dans L^2. Si l'on pouvait appliquer le théorème de Riesz, on pourrait alors représenter la forme linéaire continue $g \mapsto \int gu$ par un élément f mais pour le produit scalaire $\int fg + \int \nabla f . \nabla g$. Le problème est évidemment que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas complet pour le produit scalaire considéré (pas plus que l'ensemble des g considérées).

C'est l'idée des espaces de Sobolev : regarder la complétion des espaces de fonctions de classe C^k pour les normes L^2 des dérivées successives. On va alors "traduire" cette définition par la transformée de Fourier ce qui donnera une description de ces espaces en terme d'intégrabilité de $\hat{f}$. Finalement, on appliquera ces idées à la résolution d'EDP.

1.2 Première définition

Définition 1.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$, on appelle espace de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble de distributions tempérées suivant :*

$$H^k(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

On le munit de la norme :

$$\|f\|_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}.$$

La norme $\| * \|_{H^k}$ provient alors du produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2}.$$

Il s'agit de bien comprendre la définition. Soit T une distribution, alors dire que $T \in L^2(\mathbb{R}^d)$ signifie qu'il existe une fonction $f \in L^2$ telle que $T = T_f$, dire que $\partial^\alpha f \in L^2$ signifie que la dérivée ∂^α de f prise au sens des distributions (objet toujours bien défini) est représentable par un élément de L^2.

Lemme 1.2. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\partial_1 u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si :*

$$\exists C,\ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \partial_1 \psi dx \right| \leq C \|\psi\|_{L^2}.$$

Démonstration. Rappelons que par définition

$$\langle \partial_1 u, \psi \rangle = -\langle u, \partial_1 \psi \rangle = \int -u(x) \partial_1 \psi(x) dx.$$

Dans le premier sens, on sait que :

$$\langle \partial_1 u, \psi \rangle = \int \partial_1 u(x) \psi(x) dx$$

pour une fonction $\partial_1 u \in L^2$. Or par Cauchy Schwarz :

$$|\langle \partial_1 u, \psi \rangle| \leq \|\partial_1 u\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2},$$

ce qui donne le premier sens (avec $C = \|\partial_1 u\|_{L^2}$).

Dans l'autre sens, on a que $\psi \mapsto \langle \partial_1 u, \psi \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ munit de la norme L^2. On peut donc prolonger cette application par continuité à $L^2(\mathbb{R}^d)$ (car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^2). Mais par le théorème de Riesz, une application linéaire continue provient d'un produit scalaire : $\partial_1 u \in L^2$. □

Proposition 1.3. *L'espace $H^k(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il faut montrer que $H^k(\mathbb{R}^d)$ est complet. Soit donc f_n une suite de Cauchy dans $H^k(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $|\alpha| \leq k$, $(\partial^\alpha f_n)_n$ est de Cauchy dans L^2, on sait donc qu'elle converge vers un élément f_α (on note f au lieu de f_0). Or la convergence dans L^2 implique la convergence au sens des distributions et la continuité de la dérivation pour les distributions donne alors que $\partial^\alpha f = f_\alpha$ et on a bien la convergence de f_n vers f dans $H^k(\mathbb{R}^d)$. □

1.3 Densité et espace H_0^k

Proposition 1.4. *Les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans $H^k(\mathbb{R}^d)$ pour la norme de $H^k(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On se contentera du cas où $k = 1$ (la preuve est la même dans le cas général mais cela allège les notations). Soit donc $f \in H^1$. Montrons d'abord que l'on peut approcher f par une fonction à support compact.

Soit χ_N une fonction plateau qui vaut 1 sur $B(0, N)$ et 0 hors de $B(0, N+1)$. On peut choisir χ_N de telle sorte que $\|\chi_N\|_\infty + \|\nabla \chi_N\|_\infty \leq C$ où C ne dépend pas de N (voir le cours sur la convolution). Il est clair, par convergence dominée, que $\chi_N f := f_N$ tend vers f dans L^2.

On a par la formule de Leibniz que $\partial_1 f_N = \partial_1(\chi_N) f + \chi_N \partial_1 f$. Pour les mêmes raisons qu'avant, le terme $\chi_N \partial_1 f$ tend vers $\partial_1 f$ dans L^2. Il reste à montrer que $\partial_1(\chi_N) f \to 0$. Or :

$$|\partial_1(\chi_N)| \leq C 1_{B(0,N+1)-B(0,N)} |f|.$$

Le résultat suit par ce que $1_{B(0,N+1)-B(0,N)} |f|$ tend vers 0 dans L^2 (en fait, on a même que $1_{B(0,N)^c} |f|$ tend vers 0 par convergence dominée).

On peut donc se ramener au cas où f est à support compact. On considère alors ξ_ε une approximation de l'identité dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On pose alors $f_\varepsilon := f * \xi_\varepsilon$. On a alors que $f_\varepsilon \to f$ dans L^2 par les propriétés de la convolution et comme $\partial_1 f_\varepsilon = (\partial_1 f) * \xi_\varepsilon$ le résultat suit pour les dérivées de f de la même façon. □

Théorème 1.5. *On a les injections continues suivantes :*

1. *si* $d > 2$ *alors* $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ *où* $p^* = \frac{2d}{d-2}$ *;*
2. $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^q(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $q < \infty$ *;*
3. $H^1(\mathbb{R}) \subset C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions höldérienne d'ordre* $1/2$.

Attention à bien comprendre ce théorème : dans le cas $d = 1$, $f \in H^1(\mathbb{R})$ est a priori définie presque partout, et donc parler de continuité signifie que l'on peut choisir un représentant de f dans sa classe d'équivalence qui est continue.

Démonstration. On ne traitera que les cas $d = 1$ et $d = 3$.

Pour $d = 1$, on considère d'abord le cas où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, on observe (on applique Cauchy-Schwarz intensivement) :

$$\begin{cases} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_x^y |\varphi'(t)|dt \leq \sqrt{|x-y|}(\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|^2 dt)^{1/2} \\ |\varphi(x)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^x |\varphi'(t)\varphi(t)|dt \leq 2\|\varphi\|_{L^2}\|\varphi'\|_{L^2}. \end{cases}$$

Or, $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{1/2} = \|f\|_\infty + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{1/2}},$$

et on a montré que $\|\varphi\|_{1/2} \leq C\|\varphi\|_{H^1}$ (où C est explicitable facilement). Maintenant si $\varphi \in H^1$ est quelconque, on l'approche dans H^1 par une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Cette suite est alors de Cauchy, donc convergente dans $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Par unicité de la limite (au sens des distributions), on en déduit que $\varphi \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Cas où $d = 3$. On commence par le lemme :

Lemme 1.6. *Soit* $f(x) = f_1(x_2, x_3)f_2(x_1, x_3)f_3(x_1, x_2)$ *alors :*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \prod_j \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Démonstration. On intègre d'abord en x_1 et on applique Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx_1 = |f_1(x_2, x_3)| \int |f_2(x_1, x_3)||f_3(x_1, x_2)|dx_1 \leq |f_1(x_2, x_3)|\|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}.$$

On intègre alors en x_2 et on applique Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|dx_1dx_2 \leq \|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_1(., x_3)\|_{L^2_{x_2}}\|\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}\|_{L^2_{x_2}}.$$

Or :

$$\|\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}\|^2_{L^2_{x_2}} = \int_{\mathbb{R}}((\int_{\mathbb{R}} f_3(x_1, x_2)^2 dx_1)^{1/2})^2 dx_2 = \|f_3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|dx_1dx_2 \leq \|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_1(., x_3)\|_{L^2_{x_2}}\|f_3\|_{L^2_{\mathbb{R}^2}}.$$

On intègre alors en x_3 et un dernier Cauchy Schwarz donne le lemme (on utilise la même observation sur les normes). □

On remarque alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ que :

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi(t_1, x_2, x_3)| dt_1.$$

On écrit la même inégalité pour les autres variables et on multiplie :

$$|\varphi(x)|^3 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_1 \varphi(t_1, x_2, x_3)||\partial_2 \varphi(x_1, t_2, x_3)||\partial_3 \varphi(x_1, x_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3.$$

On prend la racine carré de cette expression et on intègre en x_1, x_2 et x_3 :

$$\int |\varphi(x)|^{3/2} \leq \int_{\mathbb{R}^3} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi dt_1)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 \varphi dt_2)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_3 \varphi dt_3)^{1/2}$$

On applique le lemme (avec $f_1(x_2, x_3) = (\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi dt_1)^{1/2} ...)$:

$$\|\varphi(x)\|_{L^{3/2}}^{3/2} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_j \varphi| dt_j)^{(1/2)\times 2} dx_{j+1} dx_{j+2})^{1/2}.$$

Soit :

$$\|\varphi(x)\|_{L^{3/2}}^{3/2} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_j \varphi|)^{1/2}.$$

On applique alors cette inégalité à φ^4 :

$$\|\varphi^6\|_{L^1} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |4\varphi^3 \partial_j \varphi|)^{1/2} = 8 \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^3 \partial_j \varphi|)^{1/2}.$$

On a par Cauchy-Schwarz :

$$\|\varphi^6\|_{L^1} \leq 8 \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^6|)^{1/4} (\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_j \varphi|^2)^{1/4}.$$

D'où :

$$\|\varphi^6\|_{L^1}^{1/4} \leq 8 \|\nabla \varphi\|_{L^2}^{3/2}.$$

On a alors $\|\varphi\|_{L^6} \leq 8^{2/3} \|\nabla \varphi\|_{L^2}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et on étend le résultat à H^1 par densité. Le résultat suit. □

2 Caractérisation par la transformée de Fourier

2.1 Deuxième définition

Proposition 2.1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence :*
- $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$, *alors*

$$\xi^\alpha \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

De plus, on a que les normes $\|f\|_{H^k}$ et $\left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{f}|^2\right)^{1/2}$ sont équivalentes.

Démonstration. Dans le premier sens, on a pour tout $|\alpha| \leq k$ que $\partial^\alpha f \in L^2$. Comme la transformée de Fourier est une quasi-isométrie sur L^2 on en déduit que $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^2$. Or, $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)$, le résultat suit.

Dans l'autre sens, on sait que $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^2$, donc en prenant la transformée de Fourier inverse, on en déduit $\partial^\alpha f \in L^2$ et donc $f \in H^k$.

Par la formule de Plancherel, on a $\langle f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^d \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$. On en déduit

$$\langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-d} \langle (i\xi)^\alpha \hat{f}, (i\xi)^\alpha \hat{g}\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \xi^{2\alpha} \hat{f}\overline{\hat{g}}.$$

D'où :

$$\langle f, f\rangle_{H^k} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq k} \xi^{2\alpha} |\hat{f}|^2$$

qui est une norme équivalente à :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{f}|^2.$$

□

On peut donc étendre la notion d'espace de Sobolev à $s \in \mathbb{R}$ en posant :

Définition 2.2. *Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}', \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}|^2 < \infty\}$$

que l'on munit du produit scalaire associé.

Cette définition coïncide avec la définition initiale dans le cas où $s \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3.
1. *On a $H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^t(\mathbb{R}^d)$ si $s \leq t$.*
2. *Pour tout s, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert.*
3. *L'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ est isomorphe au dual de $H^s(\mathbb{R}^d)$ via l'application*

$$\begin{cases} H^{-s} \to (H^s)' \\ f \mapsto L_f \end{cases}$$

où $L_f(\varphi) = \int \hat{\varphi}\overline{\hat{f}}$.

4. *Pour tout s, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_{H^s}$.*

Démonstration. Le premier point est immédiat car $(1 + |\xi|^2)^s \leq (1 + |\xi|^2)^t$ pour $s \leq t$.

Pour le deuxième point, seule la complétude n'est pas claire. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2((1 + |\xi|^2)^s d\lambda_d(\xi))$ qui est complet. Donc $\hat{f}_n \to g$ dans $L^2((1 + |\xi|^2)^s d\lambda_d(\xi))$. En particulier, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (le seul cas délicat est $s < 0$ sinon on a déjà que $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) puisque :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle g, \varphi\rangle = \langle (1 + |\xi|^2)^s g, (1 + |\xi|^2)^{-s} \varphi\rangle$$

et le résultat suit de ce que $(1+|\xi|^2)^s g \in L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et de le continuité de la multiplication par $(1 + |\xi|^2)^{-s}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, on peut écrire $g = \hat{f}$ avec $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a alors que $f_n \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

On prouve le troisième point. Observons d'abord que pour $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, L_f définit bien un élément de $\big(H^s(\mathbb{R}^d)\big)'$ puisque

$$|L_f(\varphi)| = \left|\int \hat{\varphi}\overline{\hat{f}}\right| = \left|\int (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\overline{\hat{f}}\right| \leq \|f\|_{H^{-s}}\|\varphi\|_{H^s}$$

par Cauchy-Schwarz.

Dans l'autre sens, par le théorème de Riesz, on sait que toute forme linéaire continue L est représentable par un produit scalaire : il existe $\psi \in H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}.$$

Observons que, comme dans la preuve du deuxième point, $(1+|\xi|^2)^s\hat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On pose alors $f = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^s\hat{\psi})$.

On vérifie que $f \in H^{-s}$ car :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-s}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^s\hat{\psi}))\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^s\hat{\psi}))} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s\hat{\psi}\overline{\hat{\psi}}.$$

On voit alors que

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}\overline{\hat{f}}.$$

Pour la preuve du dernier point, on utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2((1+|\xi|^2)^s d\lambda_d(\xi))$ et on conclut par la bijectivité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\square$

2.2 Applications

Proposition 2.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Pout tout $s > d/2+k$, on a $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ est égale presque partout à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^d)$, de plus il existe une constante $C = C_{d,k,s} > 0$ telle que pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on a :*

$$\max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{H^s}.$$

Démonstration. On commence par montrer que pour tout $|\alpha| \leq k$, la fonction :

$$\xi \mapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \in L^2$$

On a :

$$\int \left(\left|\frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\right|\right)^2 \leq \int \frac{|\xi|^{2k}}{(1+|\xi|^2)^s} \leq \int \frac{r^{2k+d-1}}{(1+r^2)^s}d\sigma,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur la sphère de dimension $d-1$. Cette intégrale est convergente si $2s-(2k+d-1) > 1$ (notre hypothèse).

Montrons l'inégalité

$$\max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{H^s}$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \cap H^s(\mathbb{R}^d)$. On a par hypothèse que $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2$. Or,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha\mathcal{F}(f) = \frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(f) \in L^1.$$

Par le théorème d'inversion de Fourier, on a alors que $\partial^\alpha f$ (au sens des distributions) est une fonction continue et

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi}\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R}^d.$$

On en déduit que pour tout multi-indice $|\alpha|\le k$, on a par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial^\alpha f(x)| &\le \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)|d\xi\\ &\le \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\right\|_{L^2}\left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(f)\right\|_{L^2}\le C\|f\|_{H^s}\end{aligned}$$

où

$$C=\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2}<\infty.$$

En particulier, $f\in H^s$ est une limite dans H^s de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui sont donc de classe C^k. D'après ce que l'on vient de montrer, la convergence dans H^s implique la convergence uniforme dans C^k de la suite et donc f est C^k comme limite dans C^k de fonctions C^k et l'inégalité

$$\max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial^\alpha f(x)|\le C\|f\|_{H^s}$$

s'étend dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème 2.5. *Soient $d\ge 2$ et $s>1/2$. Alors l'application linéaire :*

$$\gamma:\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$$

définie par $\gamma(f):(x_1,x_2,\dots,x_{d-1})\mapsto f(x_1,x_2,\dots,0)$ se prolonge en une application linéaire continue

$$\gamma: H^s(\mathbb{R}^d)\to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Démonstration. On note $x'=(x_1,\dots,x_{d-1})$ de sorte que $x=(x',x_d)$. Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on calcule :

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})}=\frac{1}{(2\pi)^d}\|(1+|\xi'|^2)^{s/2-1/4}\mathcal{F}(\gamma(f))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Par inversion de Fourier (pour la dernière variable x_d), on a que $f(x',0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_{x_d}(f)(x',\xi_d)d\xi_d$. Donc, par Fubini :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x',0)e^{-ix'.\xi'}dx'\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_{x_d}(f)(x',\xi_d)d\xi_d\right)e^{-ix'.\xi'}dx'\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathcal{F}_{x_d}(f)(x',\xi_d)e^{-ix'.\xi'}dx'\right)d\xi_d\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}f(x',x_d)e^{-ix_d.\xi_d}dx_d e^{-ix'.\xi'}dx'\right)d\xi_d\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\xi',\xi_d)d\xi_d.\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\xi',\xi_d)d\xi_d\right|^2\le J(\xi')\int_{\mathbb{R}}(1+|(\xi',\xi_d)|^2)^s|\mathcal{F}(f)(\xi',\xi_d)|^2d\xi_d$$

où

$$J(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_d}{(1+|(\xi',\xi_d)|^2)^s} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_d}{(1+|\xi'|^2)^s(1+\frac{\xi_d^2}{1+|\xi'|^2})}.$$

Comme $s > 1/2$, on a que $J(\xi') < \infty$ pour tout ξ'. On pose

$$\zeta = \frac{\xi_d}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}$$

et on trouve :

$$J(\xi') = C_s(1+|\xi'|^2)^{1/2-s}$$

avec

$$C_s = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^s}.$$

On déduit alors en multipliant $|\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi')|^2$ par $(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}$:

$$(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}|\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi')| \leq C_s \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi_d.$$

On intègre les deux membres de l'inégalité sur $\mathbb{R}^{d-1}$ et on en déduit que sur $\mathcal{S}$

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-1/2}} \leq C'_s \|f\|_{H^s}.$$

Par densité, l'application γ s'étend à H^s avec la même inégalité. □