Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny M1S1 Analyse de Fourier

Distributions tempérée et transformée de Fourier

1 Distributions tempérées

1.1 Définitions

Définition 1.1. *On appelle distribution tempérée une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe des constantes C et $k \in \mathbb{N}$ telles que :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty, \tag{1}$$

ou de manière équivalente s'il existe des constantes C et $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k_1,\ |\beta| \leq k_2}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty. \tag{2}$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions tempérées.

On emploiera parfois le terme de *fonctions tests* pour parler des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2. *On appelle* ordre *d'une distribution tempérée T, noté* $\mathrm{ordre}(T)$*, le plus petit $k_2 \in \mathbb{N}$ telle que (2) soit vraie (pour C et k_1 bien choisis).*

Proposition 1.3. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il y a équivalence entre*

1. *$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *pour toute suite (ψ_n) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\langle T, \psi_n \rangle \to 0$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une constante C et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

En particulier, si $\psi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a (somme finie et définition de la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi_n\|_\infty \to 0$$

donc $\langle T, \psi_n \rangle \to 0$.

Dans l'autre sens, on raisonne par contraposée. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ une fonction $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$|\langle T, \varphi_k \rangle| > k \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi_k\|_\infty.$$

Quitte à multiplier φ_k par une constante, on peut supposer que $\langle T, \varphi_k \rangle = |\langle T, \varphi_k \rangle|$ et

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi_k\|_\infty = 1.$$

On considère $\psi_k := \varphi_k / \langle T, \varphi_k \rangle$. Alors $\langle T, \psi_k \rangle = 1$ mais pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a $\|x^\alpha \partial^\beta \psi_k\|_\infty \to 0$ (dès que $|\alpha|, |\beta|$ sont $\leq k$, on a $\|x^\alpha \partial^\beta \psi_k\|_\infty \leq \frac{1}{k}$). $\square$

On étend la notion de support aux distributions :

Définition 1.4. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on appelle support de T, noté* $\mathrm{supp}(T)$ *le complémentaire du plus grand ouvert U sur lequel T est nulle pour toute fonction φ à support dans U.*

1.2 Exemples

Définition 1.5. *On dit que $f \in L^1_{loc}$ est à croissance lente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$(1 + |x|)^{-m} f(x) \in L^\infty.$$

Pour f à croissance lente, on définit une distribution tempérée T_f par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f\psi.$$

On a bien que T_f est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\psi = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{-m} f(x)(1 + |x|^m) f(x) dx$$

et on a le produit d'une fonction tempérée par une fonction L^1 (on a montré au cours précédent que $(1 + |x|^m) f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$). Le fait que T_f vérifie (2) est similaire

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \psi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + |x|^d} |(1 + |x|)^{-m} f(x)| (1 + |x|^d)(1 + |x|^m) \psi(x) dx \\ &\leq \|(1 + |x|)^{-m} f(x)\|_\infty \|(1 + |x|^d)(1 + |x|^m) \psi(x)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + |x|^d} dx. \end{aligned}$$

En pratique, on confond souvent f et T_f (l'application $f \to T_f$ est injective.)

Si $T = T_f$ est à croissance lente, alors $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$ (autrement dit, la notion de support de distribution étend celle de support d'une fonction).

Proposition 1.6. *On a les inclusions :*

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et les éléments de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *sont d'ordre* 0.
- *Une mesure de masse finie est dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et est d'ordre* 0.
- f *à croissance lente est dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et est d'ordre* 0.
- $\forall p$, $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *(et d'ordre* 0*).*
- *Pour* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, l'application* $\varphi \mapsto \partial^\alpha(\varphi)(x)$ *est dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et est d'ordre* $|\alpha|$.

Exercice 1.
- Montrer que le peigne de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_z$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- Donner un exemple de forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas une distribution tempérée.

1.3 Convergence au sens des distributions

On veut définir différentes propriétés des distributions tempérées : multiplication par des fonctions tests, convolution, restriction, dérivation ... Du point de vue de l'analyse, donner un sens à ces opérations implique de les définir de manière continue. Il faut pour cela définir une notion de continuité pour les distributions ce que l'on va faire en définissant la notion de convergence de suite de distributions (qui est essentiellement la convergence simple) :

Définition 1.7. *Une suite T_n de distributions tempérées de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ converge vers T si :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \lim_n \langle T_n, \psi\rangle \to \langle T, \psi\rangle.$$

On dit alors que $T_n \to T$ au sens des distributions tempérées.

Proposition 1.8. *Il y a unicité de la limite d'une suite de distributions convergente.*

Exercice 2. Montrer que si $u_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$, alors $\delta_{u_n} \to \delta_0$ au sens des distributions.

A partir de maintenant, dire qu'une opération est continue sur les distributions ou *au sens des distributions*, signifie que l'image d'une suite convergente est une suite convergente et que l'image de la limite est la limite des images.

Exercice 3. Montrer que les inclusions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont continues.

Cet exercice est important car il signifie notamment que la convergence dans L^p implique la convergence au sens des distributions. C'est particulièrement pratique puisque la convergence au sens des distributions est la plus faible que l'on ait à notre disposition.

1.4 Opérations sur les distributions tempérées

Proposition 1.9. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées alors la distribution fT définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle fT, \psi\rangle := \langle T, f\psi\rangle$$

est bien définie et dépend continûment de T au sens des distributions.

Par ailleurs, ordre$(fT) \leq$ ordre(T).

Démonstration. Déjà, $\langle fT, \psi\rangle$ est bien défini car $f\psi$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ puisque f est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. La linéarité de fT est clair. Soit C et $k \in \mathbb{N}$ tels que T vérifie (2) pour ces valeurs :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

On applique alors cette propriété à $f\psi$. Or pour $\beta \in \mathbb{N}^d$ avec $|\beta| \leq k$, on a :

$$\partial^\beta (f\psi) = \sum_{i,\ i \leq \beta} \binom{\beta}{i} \partial^i f \partial^{\beta - i}\psi.$$

Comme f et ses dérivées sont à croissance lente, on peut toujours trouver un entier (commun) tel que $(1+|x|^m)\partial^\beta f$ est bornée (par C par exemple), les coefficients binomiaux sont également bornés et donc on obtient :

$$\|x^\alpha \partial^\beta (f\psi)\|_\infty \leq C' \sum_{\beta' \leq \beta} \|x^\alpha \partial^{\beta'}\psi\|_\infty + \|x^{\alpha+m}\partial^{\beta'}\psi\|_\infty,$$

où C' est une constante qui dépend de k et de f (mais pas de ψ). On en déduit que fT vérifie (1) pour C' et $k' = k + m$ (mais on voit que l'on n'a pas changé l'ordre). □

Remarque 1.10. — On a en fait montré l'énoncé plus précis :" $(f, T) \mapsto fT$ est continue où l'on munit C^∞ de la convergence uniforme sur les compacts"'.
— On peut avoir ordre$(fT) <$ ordre(T) (par exemple si $f = 0$).
— Un cas particulèrement intéressant est celui où f est une fonction plateau pour K compact. On peut dans ce cas-là construire une distribution fT qui coincide avec T pour les fonctions à support dans K et à support compact.

Proposition 1.11. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors T se prolonge à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, \theta\psi \rangle$$

où θ est une fonction plateau pour le support de T. Le prolongement ne dépend pas du choix de θ et est continue au sens où si $\psi_n \to \psi$ dans $C^\infty(\mathrm{supp}(\theta))$ alors $\langle T, \psi_n \rangle \to \langle T, \psi \rangle$.

On procède toujours de la même manière pour définir une opération sur les distributions, on la définit sur une fonction f (à croissance lente par exemple). En écrivant le crochet de dualité, on fait porter l'opération sur les fonctions tests. On étend alors l'opération à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, soit $h \in \mathbb{R}^d$. Pour f à croissance lente, on a $\tau_h f := x \mapsto f(x - h)$ et donc :

$$\langle \tau_h f, \psi \rangle = \int f(x-h)\psi(x)dx = \int f(x)\psi(x+h)dx = \langle f, \tau_{-h}\psi \rangle.$$

Cela amène à la définition-proposition :

Définition 1.12. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on appelle $\tau_h T$ la distribution définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S},\ \langle \tau_h T, \psi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\psi \rangle.$$

Remarque 1.13. 1. On a bien prolongé la notion de translation aux distributions.
2. La translation est un opérateur continu au sens des distributions (le vérifier).
3. L'ordre de $\tau_h T$ est celui de T. Le support de $\tau_h T$ est $\tau_h(\mathrm{supp} T)$.

On souhaite maintenant dilater par $\lambda \neq 0$ les distributions. Pour $f \in L^1_{loc}$, on a la formule $D_\lambda f = f(\lambda x)$. On pose alors :

Définition 1.14. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on appelle $D_\lambda T$ la distribution définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S},\ \langle D_\lambda T, \psi \rangle = \frac{1}{|\lambda|^d}\langle T, D_{1/\lambda}\psi \rangle.$$

Remarque 1.15. 1. On a bien prolongé la notion de dilatation aux distributions (le vérifier).
2. La dilatation est un opérateur continu au sens des distributions (le vérifier), l'ordre de $D_\lambda T$ est celui de T. Le support de $D_\lambda T$ est $D_\lambda(\mathrm{supp} T)$.

Définition 1.16. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que T est homogène de degré m si*

$$D_\lambda T = \lambda^m . T$$

Exercice 4. *1. Montrer que δ_0 est homogène. De quel degré ? Montrer que T définie par $\langle T, \psi \rangle := \partial^\alpha \psi(0)$ est homogène. De quel degré ?*
2. Montrer que si P est un polynôme homogène de degré d, alors P définit une distribution homogène de degré d.

2 Dérivation au sens des distributions

Pour $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ à croissance lente et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, la formule d'intégration par partie donne :

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi(x)dx = -\int f(x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}dx.$$

Il n'y pas de terme crochet puisque f est à croissance lente donc bornée si on la divise par $(1+|x|^m)$ pour m assez grand et $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donc tend vers O même quand on la multiplie par $(1+|x|^m)$.

On interprète alors cette formule en terme de crochet de dualité et on l'étend aux distributions :

Définition 2.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on appelle dérivée par rapport à la variable x_i, que l'on note $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ la forme définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S},\ \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle := -\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle.$$

Proposition 2.2.
1. *$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution tempérée et* $\mathrm{ordre}(\frac{\partial T}{\partial x_i})$ *est d'ordre* $\leq \mathrm{ordre}(T)+1$.
2. $\mathrm{supp}(\frac{\partial T}{\partial x_i}) \subset \mathrm{supp}(T)$.
3. *Pour $f \in C^1$ à croissance lente, alors la distribution $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ coïncide avec la dérivée de T_f au sens des distributions.*
4. *La fonction $T \to \frac{\partial T}{\partial x_i}$ est continue au sens des distributions.*

Démonstration. Pour le premier point, on dispose alors d'une constante C et d'un entier k tels que, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$|\langle T, \psi\rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leq k,\ |\beta|\leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty,$$

On applique alors à $-\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, il vient :

$$|\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle| = |-\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle| \leq C \sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leq k,\ |\beta|\leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \partial_i \psi\|_\infty.$$

Cela prouve le premier point (avec C et $k+1$). Le deuxième point est évident. Le troisième point est clair par construction.

Pour le dernier point, soit ψ une forme test fixée et T_n une suite de distributions tempérées avec $T_n \to T$ au sens des distributions. Alors, par définition ($\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est fixée) :

$$\lim_n \langle \frac{\partial T_n}{\partial x_i}, \psi\rangle = -\lim_n \langle T_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle.$$

Cela termine la preuve. □

Observons que l'ordre de la dérivée d'une distribution peut être celui de la distribution (par exemple pour une distribution C^1). La proposition précédente apparaît comme remarquablement simple à prouver. C'est parce qu'en fait tout a été fait pour que les distribution la vérifient.

Exercice 5. Calculer, en justifiant leur existence, les dérivées de δ_0 au sens des distributions. Calculer la dérivée de $1_{\mathbb{R}+}$ au sens des distributions.

Exercice 6. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^\infty$ à croissance lente ainsi que ses dérivées. Montrer que l'on a la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{i \leq \alpha} \binom{\alpha}{i} \partial^i f \partial^{\alpha - i} T$$

Proposition 2.3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

1. *$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ est limite de quotients différentiels : au sens des distributions, dans $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_{te_k} T - T}{t}.$$

2. *pour tous indices i et j, on a :*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

3. *pour $h \in \mathbb{R}^d$ alors*

$$\tau_h T - T = \int_0^1 \left(\vec{\nabla}(T).h \right) dt.$$

3 Convolution

3.1 Introduction

Soit f dans $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas-là, le produit de convolution $f * \psi$ est défini par $f * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\psi(x-t)dt$. On considère une forme test φ, en terme de distribution, cela revient à dire :

$$\langle f * \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\psi(x-t)dt \right) \varphi(x)dx.$$

On peut appliquer Fubini et on observe :

$$\begin{aligned}
\langle f * \psi, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t)\psi(x-t)\varphi(x)dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\varphi(y+t)dy)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle dt.
\end{aligned}$$

On observe que $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle = \check{\psi} * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc étendre la définition précédente à $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \ \langle T * \psi, \varphi \rangle := \langle T, \langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle \rangle$$

On veut maintenant étendre cette définition au cas où ψ est une distribution et vérifier que l'on conserve les propriétés essentielles de la convolution (symétrie, dérivation par rapport à ce qu'on veut ...). Observons qu'il faudra une restriction puisque $1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ mais qu'aucune définition raisonnable (i.e. continue) ne peut donner un sens à $1 * 1$ en tant qu'élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

On aura pour cela besoin du lemme suivant (son utilité est assez clair) :

Lemme 3.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors la fonction $F : x \to \langle T, \tau_{-x}\psi\rangle$ est C^∞ et $\partial_j F$ est donnée par $x \to \langle T, \tau_{-x}\partial_j \psi\rangle$.*

Démonstration. On va montrer que F est C^1 et calculer sa dérivée. On conclura alors par récurrence. On observe que

$$\lim_{x\to x_0} \tau_{-x}\psi = \tau_{-x_0}\psi$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On considère par symétrie le premier vecteur de la base e_1. On observe que

$$g_h(x) := \frac{\psi(x+he_1) - \psi(x)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x + hte_1)dt.$$

Pour tout h, on a que $g_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{h\to 0} g_h = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que

$$\frac{F(x+he_1) - F(x)}{h} \to \langle T, \tau_{-x}\partial_1 \psi\rangle.$$

Et on conclut par récurrence.

Remarque 3.2. La fonction F dépend continûment du couple (T, ψ) mais n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a priori, par exemple, si $T = 1$ on a que F est constante égale à l'intégrale de ψ.

3.2 Convolution entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

On rappelle que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ désigne les distributions à support compact. D'après ce qui précède, on peut poser :

Définition 3.3. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on considère alors $T * S$ la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \langle T * S, \varphi\rangle = \langle S, F\rangle$$

où $F(x) = \langle T, \tau_{-x}\varphi\rangle$. Cette définition prolonge la définition classique dans le cas où $T \in L^1_{loc}$ et $S \in L^1$ a son support compact.

La définition précédente a un sens car $F \in C^\infty$ et $\mathcal{E}' = (C^\infty)'$. On a bien prolongé la définition classique. Reste à montrer que l'on a bien une distribution tempérée.

Proposition 3.4. *La forme $T * S$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Il reste à montrer la continuité. Pour cela, soit φ_j une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui tend vers 0. Montrons que $\langle T * S, \varphi_j\rangle \to 0$. Pour cela, on montre que $F_j := \langle T, \tau_{-x}\varphi_j\rangle$ tend vers 0 dans $C^\infty(K)$ où $\operatorname{supp}(S) \Subset K$. Or, F_j tend vers 0 uniformément sur K car pour $x \in K$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $t^\alpha \tau_{-x}\partial^\beta \varphi_j$ (donc $|\langle T, \tau_{-x}\varphi_j\rangle| \to 0$ uniformément). De même pour les dérivées de F_j car $\partial^\alpha F_j = \langle T, \tau_{-x}\partial^\alpha \varphi_j\rangle$ par le lemme 3.1. Le résultat suit. □

3.3 Propriétés

3.3.1 commutativité et résultats cruciaux

On aurait pu aussi définir $T * S$ par $\langle T, F\rangle$ où $F(x) = \langle S, \tau_{-x}\varphi\rangle$. La preuve que $T * S$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est similaire, il faut seulement observer que $F(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'est un peu pénible). Le vrai problème est de montrer que l'on a ainsi défini la même distribution (et dans le cas où S et T sont toutes deux à support compact, c'est une obligation pratique). Cela revient à montrer :

Proposition 3.5. *On a $S * T = T * S$.*

La preuve de ce résultat va passer par celles d'autres tout autant importants.

Proposition 3.6. *Soit ρ_ε une approximation de l'identité et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $T * \rho_\varepsilon$ est C^∞ et tend vers T au sens des distributions. De plus si T est à support compact, $T * \rho_\varepsilon$ aussi.*

Démonstration. Observons que pour une fonction test φ on a :

$$\langle T * \rho_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, F_\varepsilon \rangle$$

où $F_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\varphi(x+y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(z-x)\varphi(z)dz$. On en déduit que $T * \rho_\varepsilon$ se réalise comme l'application $z \to \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle$ qui est C^∞ par le lemme 3.1 :

$$\begin{aligned} \langle \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle, \varphi \rangle &= \int_z \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle \varphi(z) dz \\ &= \int \langle T, \varphi(z) \tau_z \rho_\varepsilon \rangle = \langle T, \int_z \varphi(z) \tau_z \rho_\varepsilon \rangle \end{aligned}$$

L'interversion crochet de dualité intégrale se justifie ainsi : il est clair pour φ_E en escalier à support compact (linéarité de la distribution), on passe alors à la limite en vérifiant que $\int_z \varphi_E(z)\tau_z\rho_\varepsilon \to \int_z \varphi(z)\tau_z\rho_\varepsilon$ (c'est clair par les propriétés de continuité pour la convolution). □

On déduit de cela le corollaire (sans preuve) :

Proposition 3.7. *Les espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ au sens des distributions.*

On prouve maintenant :

Proposition 3.8. *On a $(T, S) \to T * S$ est continue au sens des distributions (pour n'importe laquelle des deux définitions).*

Démonstration. On le fait dans le cas de la première définition, la preuve est la même dans l'autre. Il suffit de montrer que si $T_j \to 0,\ S_j \to 0$ au sens des distributions alors $T_j * S_j \to 0$ au sens des distributions. Pour cela, on a que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle T_j * S_j, \varphi \rangle = \langle T_j, F_j \rangle.$$

où $F_j(x) = \langle S_j, \tau_{-x}\varphi \rangle$. On utilise alors que $F_j \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et la continuité du crochet de dualité (que l'on avait admise). □

Preuve de la commutativité. Le résultat est maintenant clair : il est vrai pour T et S lisses et on conclut par continuité. □

3.3.2 Autres propriétés

Proposition 3.9. *Soient (S, T, U) trois distributions, dont au moins deux sont à supports compacts. Alors, $S * (T * U) = (S * T) * U$.*

Démonstration. Clair si tout le monde est lisse, résultat par continuité. □

Exercice 7. Soient $H := 1_{\mathbb{R}^+}$, δ_0' et 1 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on montre que

$$(H * \delta_0') * 1 = \delta_0 * 1 = 1,$$

(on verra après que $S * \delta_0' = S'$ et on a montré en exercice que $H' = \delta_0$), observons que ces produits de convolution sont bien définis car une des distributions concernés est toujours à support compact. De même :

$$H * (\delta_0' * 1) = H * 0 = 0,$$

mais $0 \neq 1$. On n'a bien sûr pas de contradiction car on n'a pas que deux sur trois des distributions concernés sont à support compact. A quel moment la preuve du résultat précédent échoue-t-elle ?

Proposition 3.10. *Soit T une distribution tempérée, alors,* $\delta_0 * T = T$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, qui est $\delta_a * T$?

Proposition 3.11. *Soient (S, T) deux éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors* $\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp}(S) + \operatorname{supp}(T)$.

Proposition 3.12. $\partial_1(S * T) = (\partial_1 S) * T = S * \partial_1 T$

Démonstration. Une preuve assez astucieuse consiste à remarquer d'abord que $\partial_1 S = S * \partial_1 \delta_0$ car :

$$\langle S * \partial_1 \delta_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle$$

où $\psi = \langle \partial_1 \delta_0, \tau_{-x} \varphi \rangle = -\varphi'(x)$. On a alors :

$$\partial_1(S) * T = ((\partial_1 \delta_0) * S) * T = (\partial_1 \delta_0) * S * T = (\partial_1 \delta_0) * (S * T).$$

□

4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} \psi = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx \psi(\xi) d\xi \overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi f(x) dx = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

Cela justifie donc la définition

Définition 4.1. *Pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de S, $\hat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ \langle \hat{S}, \psi \rangle := \langle S, \hat{\psi} \rangle.$$

La définition précédente est bien définie car $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'est fait exprès). Le fait que $\hat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ suit directement de ce que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue. On a la proposition :

Proposition 4.2. *L'application linéaire $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est continue.*

Démonstration. Il faut montrer que si $S_n \to 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{S_n}$ aussi. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\langle \widehat{S_n}, \psi \rangle = \langle S_n, \widehat{\psi} \rangle \to 0.$$

□

On donne la liste des propriétés classiques de la transformée de Fourier, les preuves sont évidentes par dualité.

Proposition 4.3. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors :*

1. *pour tout couple de multi-indices :* $(i\xi)^\alpha \partial^\beta \hat{S} = \mathcal{F}(\partial^\alpha((-ix)^\beta S))$.
2. $\widehat{\tau_a S} = e^{ia.\xi} \hat{S}$ *et* $\widehat{e^{ia.x} S} = \tau_a(\hat{S})$
3. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(S)) = (2\pi)^d \check{S}$ *et donc* $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *est une bijection*

4.1 Théorème de Paley-Wiener-Schwartz et convolution

Théorème 4.4. *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{S}$ est $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et est donnée par :*

$$\hat{S}(\xi) = \langle S, e^{-ix.\xi} \rangle.$$

Par ailleurs, $\hat{S}$ se prolonge à $\mathbb{C}^d$ en une fonction entière donnée par :

$$F(z) = \langle S, e^{-iz.\xi} \rangle$$

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle \hat{S}, \psi \rangle = \langle S, \hat{\psi} \rangle = \langle S, \int \psi(x) e^{-ix\xi} dx \rangle.$$

Donc $\langle \hat{S}, \psi \rangle = \int_x \langle S, e^{-ix\xi}\psi \rangle = \int_x \langle S, e^{-ix\xi} \rangle \psi(x) dx$. Il suffit alors de prouver que $x \mapsto \langle S, e^{-ix\xi} \rangle$ est bien C^∞ (c'est le théorème de dérivation sous le signe distribution).

L'analyticité suit des équations de Cauchy Riemann. □

Le théorème de Paley-Wiener-Schwartz est une extension du résultat précédent qui donne des estimés de croissance de $\hat{S}$ ($|\hat{S}(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{A|\Im z|}$) et qui montre qu'à l'inverse toute fonction entière satisfaisant ces estimés est la transformée de Fourier d'une distributions à support compact.

Théorème 4.5. *Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S).\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'$$

Démonstration. Déjà, le terme de gauche a un sens car c'est la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\hat{S}$ ainsi que toutes ses dérivées sont à croissance lente. Le terme de droite aura alors aussi un sens en tant que produit d'une distribution par une fonction C^∞ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées.

$$\partial^\alpha \hat{S}(\xi) = \langle S, (-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi} \rangle$$

Soit m l'ordre de S, on a alors pour K' un compact dont l'intérieur contient le support de S :

$$|\langle S, (-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi} \rangle| \leq C|\xi^\alpha| \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta (e^{-ix\xi})\|_{\infty, K} \leq C(1+|\xi|)^{m+\alpha}.$$

On a alors que $\hat{S}\hat{T}$ est aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On montre alors l'égalité par continuité (j'admets qu'il y a un peu de travail). □

4.2 Calculs de transformée de Fourier

Exercice 9. Calculer la transformée de Fourier du Dirac, de la $v.p(1/x)$.

Démonstration. Pour δ, on écrit :

$$\langle \hat{\delta}, \psi \rangle = \langle \delta, \hat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) e^{-ix0} dx = \langle 1, \psi \rangle$$

donc $\hat{\delta} = 1$.

Pour $v.p(1/x)$, on utilise $xv.p(1/x) = 1$ donc $\mathcal{F}(xv.p(1/x)) = \hat{1} = 2\pi\delta$ par la formule d'inversion de Fourier. Or $\mathcal{F}(xv.p(1/x)) = i\partial_\xi \mathcal{F}(v.p(1/x))$. Donc $\partial_\xi \mathcal{F}(v.p(1/x)) = -2i\pi\delta$ donc $\mathcal{F}(v.p(1/x)) = -2i\pi H + C$. Maintenant $\mathcal{F}(v.p(1/x))$ est impaire car $vp(1/x)$ est impaire donc $C = 0$. □

4.3 Symbole d'une EDP linéaire

Définition 4.6. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel linéaire, on note $P(\xi)$ son symbôle obtenue par transformée de Fourier, autrement dit :*

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} c_\alpha (i\xi)^\alpha,$$

où $P = \sum c_\alpha x^\alpha$.

Proposition 4.7. *On a l'équivalence :*
- *$P(\partial)u = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*
- *$P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

La preuve est claire, tout suit du fait que la transformée de Fourier remplace la dérivation par un produit par un monôme et laisse $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ stable.

Définition 4.8. *On appelle* solution fondamentale *d'un opérateur différentiel linéaire P une distribution S telle que $P(S) = \delta_0$.*

Considérons, par exemple, l'EDP, $-\Delta u + u = f$ où $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (que l'on cherche à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). Cette EDP a comme symbôle $1 + |\xi|^2$. On a alors que $\hat{u}(1 + |\xi|^2) = \hat{f}$ d'où :

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}$$

(on a raisonné jusqu'ici par équivalence). Comme $1 + |\xi|^2$ est à croissance lente ainsi que ses dérivées, on a que $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est solution de l'EDP. Poursuivons les calculs pour voir ce qui se passe. On reprend la transformée de Fourier :

$$(2\pi)^d \check{u} = \mathcal{F}\left(\frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}\right).$$

Supposons qu'en plus $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, on peut appliquer la formule

$$\mathcal{F}(\frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}) = (2\pi)^d \check{f} * D_{-1}\mathcal{F}(\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}).$$

On reconnaît alors que :

$$u = f * \mathcal{F}(\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}).$$

A l'inverse, on reconnaît que cette formule a un sens dès que f est à support compact. Sauf erreurs de calcul, on a alors montré que $\mathcal{F}(\frac{1}{1+\|\xi\|^2})$ est une solution fondamentale de $-\Delta u + u$.

4.4 Équation de la chaleur

Soit $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ une distribution de chaleur initiale. On étudie alors la variation de la température au cours du temps. Celle-ci est donnée par l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0 & \text{à } t = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On recherche une solution. L'intuition physique veut qu'elle soit unique et plutôt régulière. On prend alors la transformée de (3) en x (t est donc fixé). Il vient :

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0. \tag{4}$$

On résout explicitement (c'est facile) :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi).$$

Alors, en notant $E(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2})$ on a :

$$u(t,x) = E(t,.) * u_0(x).$$

Un calcul donne par ailleurs $E(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. On a procédé jusqu'ici sans justification. Il faut maintenant vérifier que ce que l'on a écrit a un sens. On n'a pas encore les outils nécessaire pour énoncer l'unicité dans un cadre satisfaisant. Par contre on peut déjà vérifier l'existence. En proposant comme solution $u(t,x) = E(t,.) * u_0(x)$.

Cette écriture a bien un sens car on convole deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (à t fixé non nul). Par transformée de Fourier en x on a alors dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ que :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

pour tout $t \geq 0$. On vérifie alors sans peine que u est solution (en remontant les calculs précédents).