Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny M1S1 Analyse de Fourier

Transformation de Fourier dans L^1 et L^2. Classe de Schwartz.

1 Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la transformée de Fourier de f notée $\widehat{f}$, ou $\mathcal{F}(f)$, est la fonction définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx$$

où $\langle x, \xi\rangle$ (notons que l'on écrira parfois plus simplement $x.\xi$) désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ (il existe d'autres normalisations, celle-ci simplifie l'écriture des formules de dérivations, par contre elle complique la formule d'inversion). Il est clair que la fonction est bien définie comme produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée. Par ailleurs, en appliquant le théorème de continuité, puis de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que f est continue et que si $|x|^k f(x) \in L^1$ alors $\widehat{f}$ est C^k et l'on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f).$$

En utilisant la même preuve que dans le cas des séries de Fourier (si $|\xi| \to \infty$, alors $|\xi_i| \to \infty$ pour un $i \leq d$, on commence alors par le cas où $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, on applique Fubini et on intègre par partie par rapport à x_i ...), on a par ailleurs :

Théorème 1.1 (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ où $C_0(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions qui tendent vers 0 quand $|\xi| \to \infty$.*

On a également la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ telle que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont dans L^1 alors on a :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}.$$

Démonstration. Par la dernière proposition du chapitre précédent, on peut approcher une telle f par une suite (f_n) de $C^k_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ dans L^1. Par continuité de la transformée de Fourier dans L^1 et par continuité de la multiplication de deux fonctions dans $C_b(\mathbb{R}^d)$, il suffit alors de prouver le résultat pour $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$. Par une récurrence immédiate, il suffit de traiter le cas $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. On a alors, par Fubini (tout est intégrable) et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_1 f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_d) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \right) e^{-i\sum_2^{d-2} x_i\xi_i} dx_2 \ldots dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\Big[f(x_1, x_2, \ldots, x_d) e^{-ix_1\xi_1} \Big]_{-\infty}^{\infty} + \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}} (i\xi_1) f(x_1, x_2, \ldots, x_d) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \Big) e^{-i\sum_2^{d-2} x_i\xi_i} dx_2 \ldots dx_d \\
&= (i\xi_1) \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \Big) e^{-i\sum_2^{d-2} x_i\xi_i} dx_2 \ldots dx_d \\
&= (i\xi_1) \widehat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

où on a utilisé que le terme crochet est nul car la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ est à support compact. $\square$

Par Fubini, on a aussi que la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions intégrables est égal au produit des transformées de Fourier : $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(g)$.

Enfin, on a la formule d'inversion de Fourier :

Proposition 1.3 (Formule d'inversion de Fourier)**.** *Si* $\widehat{f} \in L^1$*, on a alors* $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = (2\pi)^d \check{f}$ *(où* $\check{f} := x \mapsto f(-x)$*). En particulier, la transformée de Fourier est injective dans* L^1*.*

Démonstration. — Considérons la fonction $G(x) = e^{-x^2/2}$, on remarque que $G \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1$ ainsi que toutes ses dérivées et que :

$$G'(x) = -xG(x).$$

On peut écrire $ix\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G'(x)) = \mathcal{F}(-xG) = (-i)\mathcal{F}(-ixG) = -i\mathcal{F}(G)'$. On remarque donc que $\widehat{G}$ vérifie la même équation différentielle d'ordre 1 que G donc $\widehat{G}(\xi) = \widehat{G}(0)e^{-x^2/2}$. On calcule alors $\widehat{G}(0) = \int e^{-x^2/2}dx$ par :

$$\widehat{G}(0)^2 = \left(\int e^{-x^2/2}dx\right)\left(\int e^{-y^2/2}dy\right) = \int e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2/2}rdrd\theta$$
$$= 2\pi,$$

(on a utilisé Fubini et la formule de changement de variable en coordonnées polaires). On en déduit :

$$\widehat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi}G(\xi). \tag{1}$$

— Par Fubini et une homothétie, on en déduit que $\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|^2/2}) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d e^{-|\xi|^2/(2\varepsilon)}$ et $(2\pi)^{-d}\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|^2/2})$ est une approximation de l'identité. On observe :

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int \widehat{f}(\xi)e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}e^{ix\xi}d\xi$$

tend vers $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)$ par convergence dominée et par Fubini :

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-iy\xi}dy\right)e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}e^{ix\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x-y|^2/2}).$$

La formule d'inversion suit.
Pour l'injectivité, on considère $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} = 0$ (qui est dans L^1). Alors $(2\pi)^d\check{f} = \hat{\hat{f}} = \hat{0} = 0$ et donc $f = 0$.

□

Considérons alors l'EDP, $-\Delta f + f = u$ où $u \in L^1$. On considère une solution f (de classe C^2) dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont dans L^1. On prend la transformée de Fourier de l'EDP :

$$\mathcal{F}(-\Delta f + f) = \mathcal{F}(-\sum_i \partial_i^2 f) + \mathcal{F}(f) = (|x|^2+1)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(u).$$

On divise par $|x|^2+1$ et on reconnaît :

$$\widehat{f} = \frac{\widehat{u}}{(|x|^2+1)}.$$

Supposons donc en outre que $\frac{\widehat{u}}{(|x|^2+1)} \in L^1$, on a alors la formule d'inversion de Fourier et on peut écrire :

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}D_{-1}(\mathcal{F}(\frac{\widehat{u}}{(|x|^2+1)})),$$

ce qui donne une formule intégrale explicite pour f (où $D_1(f) = \check{f}$).

On souhaite généraliser cette idée au cas où le second membre n'est pas dans L^1, sans ajouter des hypothèses sur la transformée de Fourier de u ... Il est donc utile de pouvoir définir la transformée de Fourier dans le cadre le plus général possible.

2 Transformée de Fourier d'une fonction de L^2

Proposition 2.1 (Formule de Plancherel)**.** *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}g.$$

En particulier, pour $u \in L^1 \cap L^2$, on a $\hat{u} \in L^2$ et :

$$\|\hat{u}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \|u\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. C'est une application de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{-i\xi.x} d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi.x} d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}g.$$

En particulier, supposons que $u \in L^1 \cap L^2$ et considérons

$$\psi_\varepsilon(\xi) := \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|^2/2}).$$

On rappelle que $(2\pi)^{-d}\psi_\varepsilon$ est une approximation de l'unité. Par la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\bar{\hat{u}}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \hat{u}\bar{\hat{u}}.$$

où l'on a utilisé que $e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\bar{\hat{u}}$ est dans L^1 comme le produit d'une fonction de L^1 ($e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}$) par une fonction bornée ($\bar{\hat{u}}$). Par convergence monotone, le terme de droite tend vers $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{u}}$ (à ce stade, on ne prétend pas que ce terme est fini). Par ailleurs, $e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\bar{\hat{u}} = \mathcal{F}((2\pi)^{-d}\psi_\varepsilon * \bar{\check{u}})$ et en utilisant la formule d'inversion de Fourier ($\psi_\varepsilon * \bar{\check{u}} \in L^1$ comme convolution de deux fonctions L^1) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\bar{\hat{u}}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} u\mathcal{F}\mathcal{F}((2\pi)^{-d}\psi_\varepsilon * \bar{\check{u}}) = \int_{\mathbb{R}^d} u\psi_\varepsilon * \check{\bar{\check{u}}} = \int_{\mathbb{R}^d} u\psi_\varepsilon * \bar{u}.$$

Or, $\bar{u} \in L^2$ donc $\psi_\varepsilon * \bar{u} \to (2\pi)^d \bar{u}$ dans L^2. Par continuité du produit scalaire, on a donc que

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\bar{\hat{u}}\right) \to (2\pi)^d \|u\|_{L^2}^2.$$

□

Corollaire 2.2 (Corollaire de la preuve)**.** *Les fonctions de $L^1 \cap L^2$ dont la transformée de Fourier est dans L^1 sont denses dans L^1 et dans L^2.*

Démonstration. L'espace $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^1 et dans L^2 (par exemple, il contient les fonctions C_c^∞ qui sont dense dans L^1 et dans L^2). Pour $f \in L^1 \cap L^2$, on considère $(2\pi)^{-d}\psi_\varepsilon * f$ qui tend vers f dans L^1 et dans L^2 par approximation de l'unité. De plus, $\mathcal{F}\left((2\pi)^{-d}\psi_\varepsilon * f\right) = (2\pi)^{-d} e^{-\varepsilon|x|^2/2} * \mathcal{F}f \in L^1 \cap L^2$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction de $L^1 \cap L^2$. □

L'opérateur $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ est un opérateur linéaire continue (on munit $L^1 \cap L^2$ de la norme L^2) sur un sous-espace dense : il se prolonge uniquement en opérateur continue sur L^2.

Définition 2.3. *On appelle Transformée de Fourier-Plancherel l'unique extension continue de* $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ *à* L^2.

Proposition 2.4. *L'opérateur* $\sqrt{2\pi}^{-d}\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ *est une isométrie. Autrement dit, pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *on a* $\|f\|_2^2 = (2\pi)^d \|\hat{f}\|_2^2$. *De plus, pour tous* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}g.$$

La proposition est évidente, la preuve de la formule de Plancherel suit de la continuité du produit scalaire.

ATTENTION : on a défini la transformée de Fourier d'une fonction de L^2 par un argument de prolongement par continuité, en particulier, si $f \in L^1 \cap L^2$, la transformée de Fourier de f est bien défini par une intégrale mais si f n'est pas dans L^1, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix.\xi}dx$ n'a pas de sens.

Proposition 2.5. *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. *Pour* $a \in \mathbb{R}^d$, *On note* $\tau_a : f \mapsto f(. - a)$ *et* $e_a : x \mapsto e^{iax}$. *Alors, on a les égalités suivantes dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$:

1. $\mathcal{F}(\tau_a(f)) = e_{-a}.\mathcal{F}(f)$ *dans* L^2.
2. $\mathcal{F}(e_a.f) = \tau_a(\hat{f})$
3. *pour* $u \in Gl_n(\mathbb{R})$, *on a* $\mathcal{F}(f \circ u) = |\det u|^{-1}\mathcal{F}f \circ u^{-t}$ *(*u^{-t} *est l'inverse de la transposée de* u*). En particulier, si* $f_\lambda = |\lambda|^{-d}f(\lambda{-}1.)$ *on a*
$$\widehat{f_\lambda} = \hat{f}(\lambda.)$$
4. *En prenant* $\lambda = -1$, *on en déduit* $\hat{\check{f}} = \check{\hat{f}}$.
5. *On a* $\hat{\bar{f}} = \bar{\check{\hat{f}}}$ *et* $\bar{\hat{f}} = \hat{\check{\bar{f}}}$.
6. $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d\check{f}$.

Démonstration. La preuve est est une application directe de la continuité dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de toutes les opérations utilisées. Détaillons, par exemple, la preuve de $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d\check{f}$:

1. Les fonctions f de L^1 dont la transformée de Fourier est dans L^1 sont denses dans $L^1 \cap L^2$ d'après le corollaire ci-dessus.
2. Pour une telle f, on a que $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d\check{f}$ dans L^1. En particuliers, c'est vrai presque partout et donc dans L^2 car deux fonctions de L^2 qui coïncident presque partout sont les mêmes (dans L^2).
3. On a que $f \mapsto \hat{\hat{f}}$ et $f \mapsto (2\pi)^d\check{f}$ sont continues de L^2 dans L^2. Donc par passage à la limite, $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d\check{f}$.

$\square$

Exercice 1. Considérons $f : x \mapsto 1_{\mathbb{R}+}(x)e^{-|x|}$. Sans la calculer, montrer que la transformée de Fourier de f est bien définie et est dans $L^2 \cap C_0(\mathbb{R})$ mais pas dans L^1. Calculer $\hat{f}$.

En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+ix}$.

Remarque 2.6. On n'a pas de formule pour $\mathcal{F}(f * g)$ dans L^2 car $f * g$ n'est en général ni dans L^1 ni dans L^2.

3 Classe de Schwartz

On souhaite trouver un espace qui jouisse de toutes les bonnes propriétés de L^1 et de L^2 : stable par convolution (L^1), par transformée de Fourier(L^2). On souhaite enfin que cet espace soit le "plus gros possible" Pour faire cela, on va au contraire construire un espace "le plus petit possible" et on obtiendra par dualité un espace de "fonctions" très gros où toutes les opérations seront définies (voir le chapitre suivant).

Définition 3.1. *On appelle* Classe de Schwartz*, noté* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*, l'ensemble suivant :*

$$\{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d,\ x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\}.$$

On le munit de la famille de norme $\|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty$.

Autrement dit, une suite (ψ_j) de $\mathcal{S}$ converge vers ψ si pour tout α et β, $(x^\alpha \partial^\beta \psi_j)$ converge uniformément vers $x^\alpha \partial^\beta \psi$. On montre sans difficulté que ψ est automatiquement dans $\mathcal{S}$. On dira alors qu'une opération est continue pour $\mathcal{S}$ si l'image d'une suite convergente est convergente (ce qui est ici équivalent à la convergence pour la métrique associée à la famille de normes).

Proposition 3.2. *Soit* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*, alors* $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$*, on a que* $\lim_{|x|\to infty} x^\alpha \partial^\beta \psi = 0$ *et*

Démonstration. C'est clair puisque $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ donné, on sait que $|x|^2.x^\alpha \partial^\beta \psi$ est borné. □

On a les exemples classiques suivants
— Il est clair que $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
— La fonction de Gauss $e^{-|x|^2/2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
— La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.3.
1. *Pour tout multi-indice, la dérivation* ∂^α *est bien définie de* $\mathcal{S}$ *dans lui-même et est un opérateur linéaire continu.*
2. *Pour tout multi-indice, la multiplication par* x^β *est bien définie de* $\mathcal{S}$ *dans lui-même et est un opérateur linéaire continu.*

Proposition 3.4. *L'inclusion* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est dense.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On considère alors une fonction plateau χ_R à support dans $B(0,R)$ et nulle en dehors de $B(0,R+1)$. Une telle fonction peut être choisit de sorte que $\|\chi_R\|_{C^k} \leq C(k)$ où $C(k)$ est une constante qui dépend de k mais pas de R. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha|, |\beta| \leq k$, par la formule de Leibniz

$$x^\alpha \partial^\beta(\chi_R \psi) - x^\alpha \partial^\beta(\psi) = x^\alpha \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\beta'} \psi \partial^{\beta-\beta'} \chi_R - x^\alpha \partial^\beta(\psi).$$

On a alors que

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\chi_R \psi) - x^\alpha \partial^\beta(\psi)\|_\infty \leq C'(k)\|x^\alpha \psi\|_{\infty, B(0,R)^c} + C(k) \sum_{\beta' \leq \beta,\ \beta' \neq \beta} \binom{\alpha}{\beta} \|x^\alpha \partial^{\beta'}\|_{\infty, B(0,R)^c}$$

et le résultat suit. □

On en arrive maintenant à la raison même de la classe de Schwartz :

Théorème 3.5. *L'application linéaire $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bien définie. Elle est continue et bijective et vérifie $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\psi)) = (2\pi)^d \check{\psi}$.*

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors, on a le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Pour tous α et β dans $\mathbb{N}^d$ et $p \geq 1$, on a que $x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et si $\psi \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors, $\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Comme $\psi \in \mathcal{S}$, $(|x|+1)^{d+2} x^\alpha \partial^\beta \psi$ est dans L^∞. On remarque alors que :

$$x^\alpha \partial^\beta \psi = \left((|x|+1)^{d+2} x^\alpha \partial^\beta \psi \right) \frac{1}{(|x|+1)^{d+2}}.$$

Or $\frac{1}{(|x|+1)^{d+2}} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et donc $x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^p$ comme le produit d'une fonction bornée par une fonction de L^p. En prenant $p = 1$, on peut alors calculer la transformée de Fourier de $x^\alpha \partial^\beta \psi$ et on observe que si $\psi \to 0$ dans $\mathcal{S}$ alors par définition $((|x|+1)^{d+2} x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans L^∞ donc $x^\alpha \partial^\beta \psi \to 0$ dans L^1 et par continuité de la transformée de Fourier (de $L^1 \to C_0$), $\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans L^∞. □

Preuve du théorème. On peut alors utiliser les formules de dérivations pour la transformée de Fourier et on reconnaît :

$$\xi^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}(\psi)) = \xi^\alpha \mathcal{F}((-ix)^\beta \psi) = \mathcal{F}(-(i)^{|\alpha|} \partial^\alpha ((-ix)^\beta \psi)).$$

On applique alors la formule de Leibnitz à $\partial^\alpha((-ix)^\beta \psi)$ on reconnaît une somme de terme en $x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \psi$ la linéarité puis le lemme précédent implique alors que $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}$ est bien continue. Le reste du théorème suit. □

Voici quelques propriétés additionnelles qui découlent du fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$..

Proposition 3.7. *L'espace $\mathcal{S}$ est stable par convolution et pour ψ et φ dans $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}(\psi * \varphi) = \mathcal{F}(\psi) * \mathcal{F}(\varphi)$ et $\mathcal{F}(\psi\varphi) = (2\pi)^d \check{\psi} * \check{\varphi}$.*

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi} \varphi.$$

En particulier, pour $u \in \mathcal{S}$:

$$\|\hat{\psi}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \|\psi\|_{L^2}^2.$$