Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny M1S1 Analyse de Fourier

**Produit de convolution**

# 1 Définition

Le but de ce cours est d'étudier le produit de convolution de deux fonctions mesurables et d'en établir les principales propriétés.

**Définition 1.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, considérons l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)d\lambda_d(t).$$

*Lorsque celle-ci a un sens (c'est-à-dire si $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est positive ou intégrable), on l'appelle* produit de convolution *de $f$ et $g$ en $x$ et on la note $f * g(x)$.*

En posant $t = x-u$, on a que $f*g(x)$ est bien défini si et seulement si $g*f(x)$ l'est et alors $f*g(x) = g*f(x)$. Quand tous les termes qui apparaissent sont intégrables, $(f,g) \mapsto f*g(x)$ est une application bilinéaire, par linéarité de l'intégrale.

**Définition 1.2.** *Soit $f$ une fonction mesurable, on appelle support de $f$, noté* $\mathrm{supp}(f)$ *le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f$ est nulle presque partout.*

**Proposition 1.3.** *Soit $f$ et $g$ mesurables alors en dehors de* $\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)$*, on a que $f*g$ est bien défini et vaut $0$ ;*

**Proposition 1.4.** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $r \in [0,\infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}.$$

*Alors, pour presque tout $x$, $f*g(x)$ est bien défini, la fonction $x \mapsto f*g(x)$ est mesurable et $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$.*

Bien sûr, $x \mapsto f*g(x)$ n'est pas définie partout mais presque partout et n'est pas, en ce sens, une fonction. L'énoncé stipule néanmoins que $f*g \in L^r$ : $f*g$ est une classe de fonctions mesurables qui coïncident presque partout.

*Démonstration.* Supposons $r \neq \infty$. On commence par supposer $f$ et $g$ positives. Dans ce cadre-là, $x \mapsto f*g(x)$ est définie en tout point à valeurs dans $[0,\infty]$ et mesurable. On calcule :

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)d\lambda_d(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(t)^p g(x-t)^q\right)^{\frac{1}{r}} \left(f(t)^p\right)^{\frac{r-p}{pr}} \left(g(x-t)^q\right)^{\frac{r-q}{rq}} d\lambda_d(t) \\ &\leq \left\| \left(f(t)^p g(x-t)^q\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_r \cdot \left\| \left(f(t)^p\right)^{\frac{r-p}{pr}} \right\|_{\frac{pr}{r-p}} \left\| \left(g(x-t)^q\right)^{\frac{r-q}{qr}} \right\|_{\frac{qr}{r-q}} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité suit de l'inégalité de Hölder généralisé puisque :

$$\frac{1}{r}+\frac{r-p}{pr}+\frac{r-q}{qr} = \frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r} = 1.$$

Observons que

$$\left\| (f(t)^p)^{\frac{r-p}{pr}} \right\|_{\frac{pr}{r-p}} = \left( \int f(t)^p \right)^{\frac{r-p}{pr}} = \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}}.$$

De même, par invariance de la mesure de Lebesgue par translation :

$$\left\| (g(x-t)^q)^{\frac{r-q}{qr}} \right\|_{\frac{qr}{r-q}} = \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}.$$

On a alors :

$$\int |f * g(x)|^r dx \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int \int (f(t)^p g(x-t)^q) \, dt dx.$$

Par Fubini et invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on a alors

$$\int |f * g(x)|^r dx \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q.$$

donc $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. On en déduit la proposition dans le cas où $f$ et $g$ sont positives.

Dans le cas général, on a, en écrivant $f = f^+ - f^-$ (resp. $g = g^+ - g^-$) où $f^\pm$ (resp. $g^\pm$) est positive et dans $L^p$ avec $\|f^\pm\|_p \leq \|f\|_p$ (resp. dans $L^q$ avec $\|g^\pm\|_q \leq \|g\|_q$). Par linéarité, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, on a que $f * g(x)$ est bien défini puisque $f * g = (f^+ - f^-) * (g^+ - g^-)$ et $x \mapsto f * g(x)$ est mesurable (comme limite de fonctions mesurables en prenant des suites de fonctions $f_n^\pm$ et $g_n^\pm$ qui tendent vers $f^\pm$ et $g^\pm$ en croissant). On a l'inégalité :

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

en appliquant le calcul précédent à $|f|$ et $|g|$.

Dans le cas $r = +\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder directement :

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) d\lambda_d(t) \right| \leq \|f\|_p \|g(x-t)\|_q$$

et le résultat suit par invariance de la mesure de Lebesgue par translation (on peut toujours supposer $q \neq \infty$). $\square$

Dans le cas $r = \infty$, on a le résultat plus précis :

**Proposition 1.5.** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Alors, $x \mapsto f * g(x)$ est uniformément continue et bornée avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Par ailleurs, si $q \notin \{1, \infty\}$, alors $f * g(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.*

On a besoin de la proposition suivante :

**Proposition 1.6.** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g$ est de classe $C^k$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a que $\partial^\alpha (f * g)$ est uniformément continue et $\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g$.*

On rappelle que pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et que pour $\varphi$ de classe $C^k$, on

$$\partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_d} \varphi}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_d)^{\alpha_d}}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_j}$ désigne la dérivée par rapport à la $j$-ième coordonnée.

*Preuve de la Proposition 1.6.* Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a alors :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t).$$

Il s'agit d'une intégrale à paramètre et on veut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Pour cela, il suffit de se restreindre au cas où $|x| \leq R$. On a alors, par hypothèse que $\mathrm{supp}(g) \subset B(0, M)$ pour un $M$ assez grand. En particulier, dans l'intégrale définissant $f * g(x)$, on peut se contenter d'intégrer sur $B(0, M+R)$.

Sur cette boule, $t \mapsto f(t)$ est intégrable car $L^p \subset L^1$ sur les domaines de mesures finies. On a alors $\partial^\alpha f(t)g(x-t) = f(t)\partial^\alpha g(x-t)$ qui est majoré en valeur absolue par $|f(t)|\|\partial^\alpha g\|_\infty \in L^1$. On en déduit que $f * g$ est de classe $C^k$ avec $\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$.

Il suffit de montrer l'uniforme continuité dans le cas où $\alpha = (0, \ldots, 0)$ et on pourra alors appliquer le résultat en remplaçant $g$ par $\partial^\alpha g$. Comme $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g$ est uniformément continue et donc pour $h$ assez petit, on a par la proposition 1.4 que

$$|f * g(x) - f * g(x+h)| \leq \|f\|_p \|g(t) - g(t+h)\|_q$$

qui tend bien vers 0 quand $|h| \to 0$. $\square$

*Preuve de la Proposition 1.5.* Par symétrie, on peut supposer que $q \neq \infty$. Soit $(g_n)$ une suite de $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers $g$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$. Par la proposition 1.4, on a alors que

$$\|f * g - f * g_n\|_\infty = \|f * (g - g_n)\|_\infty \leq \|f\|_p \|g - g_n\|_q \to 0.$$

On a donc la convergence uniforme de $f * g_n$ vers $f * g$ et par la proposition 1.6, $f * g_n$ est continue. Donc $f * g$ est uniformément continue comme limite uniforme de fonctions continues.

Si, de plus, $p \neq \infty$, on peut alors considérer une suite $(f_n)$ de fonctions de $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui tend vers $f$ dans $L^p$. On a donc que

$$\|f*g - f_n*g_n\|_\infty \leq \|f*g - f*g_n\|_\infty + \|f*g_n - f_n*g_n\|_\infty \leq \|f\|_p\|g-g_n\|_q + \|f-f_n\|_p\|g_n\|_q \to 0.$$

Mais $f_n * g_n$ est à support inclus dans la somme des supports de $f_n$ et $g_n$ et donc $f_n * g_n$ est à support compact. La fonction $f * g$ est alors une limite uniforme de fonctions à support compact : elle tend vers 0 en l'infini. $\square$

Pour finir, remarquons que dans le cas $p = \infty$ et $q = 1$, on n'a pas forcément que $f * g$ tend vers 0 en l'infini. Par exemple, on peut prendre $f = 1$ (qui est bornée) et $g$ dans $L^1$ avec $\int g \neq 0$, alors, $f * g(x) = \int g$ est constante et ne tend pas vers 0.

## 2 Propriétés

On regroupe ici les principales propriétés du produit de convolution, les preuves sont pour l'essentiel immédiates et laissée en exercice.

**Proposition 2.1.** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. Alors $(f * g) * h = f * (g * h)$ est bien défini et est dans $L^s$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2 = \frac{1}{s}$.*

**Proposition 2.2.** *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On suppose que $f$ est $C^k$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a $\partial^\alpha f \in L^p$. Alors $f * g$ est de classe $C^k$ et $\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g \in L^r$.*

L'intérêt premier du produit de convolution est qu'il permet de régulariser les fonctions. On a, comme dans le cas du cercle :

**Définition 2.3.** *Une suite* $(k_n)$ *de fonctions mesurables* $k_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *est un* noyau de sommabilité *si*

1. $\forall n,\ \int_{\mathbb{R}^d} k_n = 1,$
2. $\exists C > 0,\ \forall n,\ \int_{\mathbb{R}^d} |k_n| \leq C,$
3. $\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \int_{[\epsilon,1-\epsilon]^d} |k_n| \to 0.$

Bien sûr, on peut aussi avoir des noyaux de sommabilité qui dépendent d'un paramètre réel (qui tend vers 0 en général) et la condition 2 est redondante dans le cas de noyau positif.

**Théorème 2.4.** *Soit* $(k_n)$ *un noyau de sommabilité. Alors*

1. *Soit* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *pour* $1 \leq p < \infty$*, alors* $k_n * f \to f$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$*. De plus si* $f$ *est continue en* $x$ *alors* $k_n * f(x) \to f(x)$
2. *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$*, alors* $k_n * f \to f$ *uniformément.*

En utilisant l'existence de fonctions $C^\infty$ à support compact (voir TD), on en déduit alors la densité des fonctions $C^\infty$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Considérons un compact $K$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour $a > 0$, on note $K_a := \{x \in \mathbb{R}^d,\ d(x,K) \leq a\}$, c'est encore un compact. Considérons la fonction : $\chi_a : x \mapsto \max\left(\frac{a-d(x,K_a)}{a}, 0\right)$ alors $\chi_a$ est une fonction continue par composée et qui vaut 1 sur $K_a$ et 0 sur $K_{2a}^c$. Considérons maintenant une fonction $\theta_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $C^\infty$, positive, à support compact dans $B(0,a)$ et telle que $\int \theta_a = 1$. Considérons finalement $\psi_a := \theta_a * \chi_a$ : c'est une fonction $C^\infty$, positive, comprise entre 0 et 1, à support dans $K_{3a}$ et qui vaut 1 sur $K$. En choisissant $a$ assez petit, on a montré :

**Proposition 2.5.** *Soient* $K$ *et* $L$ *deux compacts de* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $K \subset L^\circ$*. Alors, il existe une fonction* $\theta$ *telle que :*

— $\theta$ *est* $C^\infty$ *et* $0 \leq \theta \leq 1$.
— $\theta$ *est à support compact dans* $L$ *et* $\theta \equiv 1$ *sur* $K$.

Une telle fonction $\theta$ est une *fonction plateau* (lisse) pour $K$ (dans $L$). On aura besoin de la proposition suivante pour la transformée de Fourier. Introduisons quelques notations pour la preuve :

1. pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on dit que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_i \overset{\forall i \leq d}{\leq} \alpha_i$. Pour $\chi \in (\mathbb{R}^+)^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note $\chi^\alpha := \chi_1^{\alpha_1} \cdots \chi_d^{\alpha_d}$.
2. on note alors
$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \Pi_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}, \text{si } \beta \leq \alpha \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
3. pour $f$ et $g$ de classe $C^k$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$, la formule de dérivation du produit ou *formule de Leibniz* s'écrit alors
$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

**Proposition 2.6.** *Soit* $f \in C^k(\mathbb{R}^d))$ *et* $1 \leq p < \infty$ *tels que* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$*,* $|\alpha| \leq k$*, on a* $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d)$*. Alors on peut approcher* $f$ *par une suite* $(f_n)$ *de fonctions* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha f_n\|_p \to 0$*,* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ *avec* $|\alpha| \leq k$.

*Démonstration.* Par convolution avec une approximation lisse de l'identité, on peut supposer que $f$ est $C^\infty$ ($\partial^\alpha(f * h_n) = \partial^\alpha(f) * h \to \partial^\alpha(f)$ dans $L^p$).

Soit $\theta_n$ une fonction plateau pour $B(0,n)$ dans $B(0,n+1)$. On peut choisir $\theta_n$ de sorte que $\|\theta_n\|_{C^k} \leq C$ ;, uè où $C$ est une constante qui ne dépend pas de $n$ (cela suit de la construction même d'une fonction plateau). Posons alors $f_n := \theta_n f$ et vérifions que $f_n$ convient. Soit donc $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$. Par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha f_n = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}\theta_n.$$

D'où :

$$\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f = (\partial^\alpha f).(1-\theta_n) + \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}\theta_n$$

$$\|\partial^\alpha f_n - f\|_p \leq \|\partial^\alpha f.(1-\theta_n)\|_p + \sum_{\beta \leq \alpha,\ \beta \neq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}\theta_n\|_p$$

Pour tout $\beta \leq \alpha$, $\beta \neq \alpha$, on a que $\partial^{\alpha-\beta}\theta_n \leq C 1_{B(0,n+1)\setminus B(0,n)}$, donc

$$\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}\theta_n\|_p \leq C\|\partial^\beta f\|_{p,B(0,n+1)\setminus B(0,n+1)}$$

or, par Fubini :

$$\|\partial^\beta f\|_p^p = \sum_n \int_{B(0,n+1)\setminus B(0,n)} |f|^p < \infty$$

donc $\|\partial^\beta f\|_{p,B(0,n+1)\setminus B(0,n+1)} \to 0$. De même, $\|\partial^\alpha f.(1-\theta_n)\|_p \to 0$. $\square$