Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny M1S1 Analyse de Fourier

Applications des séries de Fourier

1 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Les séries de Fourier ont été précisément introduites pour résoudre l'équation de la chaleur par Joseph Fourier en 1822.

1.1 Équation de la chaleur

On considère le problème suivant : soit $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction où $u(t,x)$ désigne la température en x sur une barre de longueur 1 au temps t. On suppose que les extrémités de la barre sont maintenues froides $u(t,0) = u(t,1) = 0$ à tous les temps (condition de Dirichlet). On considère $x \mapsto u_0(x)$ la température initiale. On identifie $[0,1]$ avec $\mathbb{T}$.

Ce problème physique est régi par l'*équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0, \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{T} \quad (1) \\ u(0,x) & = u_0(x) \quad (3) \\ u(t,0) & = u(t,1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Théorème 1.1. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$. Il existe une unique solution de* (1) *et* (2) *qui soit C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{T}$ et telle que $\lim_{t\to 0} u(t,.) = u_0$ dans $L^2(\mathbb{T})$.*

Cette section est consacrée à la preuve du théorème.

Existence d'une solution On cherche des solutions non nulles de (1) et (2) sous la forme $u(t,x) = a(x)b(t)$ (séparation des variables) que l'on sommera (méthode de superposition). On a alors par (1)

$$a(x)b'(t) \overset{\forall t,x}{=} a''(x)b(t).$$

Si u n'est pas identiquement nulle, on a alors un (x_0,t_0) tels que $a(x_0)b(t_0) \neq 0$. On a alors $\mathbb{R} \ni \lambda := \frac{a''(x_0)}{a(x_0)} = \frac{b'(t_0)}{b(t_0)}$ et en appliquant en (x,t_0) et (x_0,t) respectivement, on a alors :

$$\begin{cases} a''(x) & = \lambda a(x),\ \forall x \in \mathbb{T} \\ b'(t) & = \lambda b(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, on a alors $b(t) = \alpha$, $a = \beta x + \gamma$ et la condition (2) impose, si $\alpha \neq 0$ que $\beta = \gamma = 0$ et donc $u = 0$. On suppose maintenant $\lambda > 0$. On déduit $b(t) = Ce^{\lambda t}$ qui ne s'annule jamais. On trouve alors $a(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ avec la condition $a(0) = a(1) = 0$. Si $\lambda > 0$, on n'a pas de solution non nulle.

On suppose donc $\lambda < 0$ et on note ρ le réel positif tel que $\rho^2 = -\lambda$, on a alors :

$$\begin{cases} a(x) & = A \sin \rho x + B \cos \rho x, \\ b(t) & = C \exp(-\rho^2 t) \end{cases}$$

et on tire $B = 0$ de $a(0) = 0$. En utilisant $a(1) = 0$, on a alors $\rho = \pi k$ pour $k \in \mathbb{N}$ (si $A \neq 0$ puisque l'on veut des solutions non nulles). On a donc que u est de la forme $C \sin(\pi k x) \exp(-\pi^2 k^2 t)$. On superpose alors de telles solutions et on trouve formellement :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} b_k \sin(\pi k x) \exp(-\pi^2 k^2 t)$$

où les c_k sont des constantes que l'on détermine avec la condition (3). Cela ne peut pas être donner par la série de Fourier de u_0 puisque celle-ci fait intervenir les fréquences $2\pi k$ et des termes en sin et cos. Pour résoudre cette difficulté, on "double" l'intervalle $[0,1]$ en $[-1,1]$ et on prolonge la fonction u_0 sur $[-1,1]$ par imparité ($u_0(-x) = -u_0(x)$). On appelle u_0 cette fonction (qui est toujours dans L^2) et on la décompose en série de Fourier sur $[-1,1]$: $u_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos(\pi k x) + b_k \sin(\pi k x)$. Par imparité, les a_k sont nuls et les b_k sont donc uniquement déterminés (en particulier, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$).

On doit maintenant vérifier que u est solution du problème ! Pour cela, observons que pour $t \geq a > 0$ et $(j_1\, j_2) \in \mathbb{N}$, on a que $|\partial_t^{j_1}\partial_x^{j_2}(b_k \sin(\pi k x)\exp(-\pi^2 k^2 t))| \leq |b_k(\pi k)^{j_2+2j_1}\exp(-\pi^2 k^2 a)$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. On en déduit que u est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{T}$ par ailleurs, on peut dériver à l'intérieur de la série et on a bien que u est solution de (1), (2). On se fixe $\varepsilon > 0$, pour N assez grand, on a que $\sum_{k\leq N} |b_k|^2 \leq \varepsilon$ comme reste d'une série absolument convergente. On a alors (on a prolongé $u(t,x)$ à $R^{+*}\times[-1,1]$ par imparité car les $\sin(\pi k x)$ sont orthogonaux sur $[-1,1]$ mais pas sur $[0,1]$, on rappelle par ailleurs que $\int_{[-1,1]} \sin^2 \pi k x = 1$) :

$$\begin{aligned}\|u_0(.) - u(t,.)\|^2_{L^2[-1,1]} &= \sum_{k<N} |b_k|^2(1-\exp(-\pi^2k^2t))^2 + \sum_{k\geq N} |b_k|^2(1-\exp(-\pi^2k^2t))^2\\ &\leq \sum_{k<N} |b_k|^2(1-\exp(-\pi^2k^2t))^2 + \sum_{k\geq N} |b_k|^2.\end{aligned}$$

Le premier terme est $\leq \varepsilon$ pour t suffisamment petit ce qui donne l'existence dans le théorème.

Unicité de la solution On va utiliser une méthode de type "conservation" de l'énergie : on va montrer que l'énergie su système décroît en temps et en déduire l'unicité de la solution.

Soit v une solution de (1), (2), (3). Considérons la fonction $t \mapsto E(t) = \int_{\mathbb{T}} |v(x,t)|^2 dx$, par le théorème de dérivation sous le signe somme puis en utilisant (1) (les dominations sont données par des constantes puisque v est C^∞), on a pour tout $t > 0$ que :

$$E'(t) = \int_{\mathbb{T}} 2v(x,t)\partial_t v(x,t)dx = \int_{\mathbb{T}} 2v(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{(\partial x)^2}dx.$$

On intègre par partie et on utilise (2) : :

$$E'(t) = \left[2v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right]_0^1 - \int_{\mathbb{T}} 2\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx = -\int_{\mathbb{T}} 2\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx \leq 0.$$

La fonction E est donc décroissante.

En particulier, si w est la différence de deux solutions à (1), (2), (3). Par linéarité, on a

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & = 0, \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{T}\\ w(0,x) & = 0\\ w(t,0) & = w(t,1) = 0\end{cases}$$

La norme L^2 de $w(t,)$ est donc une fonction décroissante, positive et qui tend vers 0 en 0. Elle est identiquement nulle et on a donc unicité de la solution.

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et/ou suffisante sur u_0 pour garantir la convergence uniforme de $u(t,.)$ vers u_0.

1.2 Équation de Laplace

Soit $U := z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ et u une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ sur } U \\ V = u \text{ sur } \partial U \end{cases}$$

La condition (de Dirichlet) au bord signifie que l'on souhaite que V de prolonge par continuité au bord de U en u (on peut demander aussi $u \in L^2$ ou $u \in L^1$).

Par hypothèse, on peut développer u en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et

$$u(\theta) \sim \sum_k c_k e^{ik\theta}.$$

On a a priori pas la convergence de la série de Fourier. On pose alors

$$V := \sum_k c_k e^{ik\theta} r^{|k|}$$

où $z = re^{i\theta}$. Observons que V est bien définie et continue sur U puisque $|c_k e^{ik\theta} r^{|k|}| = o(r^{|k|})$ (par le lemme de Riemann-Lebesgue) qui est le terme général d'une série absolument convergente sur $\{z,\ |z| \leq 1 - \varepsilon\}$. En appliquant le même argument aux dérivées partielles en r et θ, on a que V est C^∞.

Proposition 1.2. *La fonction V est l'unique solution de l'équation de Laplace sur U telle que $V(re^{i\theta})$ converge uniformément vers u pour quand $r \to 1$.*

Le reste de cette section est consacrée à la preuve de la proposition. Observons pour cela que, à $r < 1$ fixé, on a par Fubini :

$$V(re^{i\theta}) = u * P_r(\theta)$$

où $P_r(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}$. On a alors (voir le TD 1) que

$$P_r(\theta) = 2\frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2rcos\theta + r^2}$$

dont on a montré qu'il s'agissait d'un noyau de sommabilité. On en déduit que $V(re^{i\theta})$ converge uniformément vers u pour quand $r \to 1$.

On montre maintenant que V est harmonique ($\Delta V = 0$). Par convergence uniforme des dérivées, il suffit de le vérifier pour chaque $(r^{|k|}e^{ki\theta})$. On peut utiliser l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques (ou le fait que les fonctions holomorphes et anti-holomorphes sont harmoniques) :

$$\Delta(r^{|k|}e^{ki\theta}) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial(r^{|k|}e^{ki\theta})}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{(\partial\theta)^2} = 0.$$

L'unicité suit du principe du maximum que l'on admet.

2 Méthodes hilbertiennes et inégalités

2.1 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Proposition 2.1. *Soit $u \in C^1([0,1])$, alors*

$$2\pi \left\| u - \int_{\mathbb{T}} u(x)dx \right\|_2 \leq \|u'\|_2.$$

Par ailleurs, on a l'égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si u est une combinaison linéaire de 1, $\cos(2\pi x)$ *et* $\sin(2\pi x)$.

Démonstration. Comme u est C^1, sa dérivée u' est C^0 sur $[0,1]$ donc continue par morceaux sur $\mathbb{T}$ (quitte à modifier la valeur en 1). En particulier, $u' \in L^2(\mathbb{T})$ et donc $u' \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u'}(k)e_k$ avec convergence de la série de Fourier dans L^2. De même, $u =\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e_k$ et on a la relation $\hat{u'}(k) = 2i\pi k\hat{u}(k)$.

On peux supposer que u vérifie $\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{T}} u(x)dx = 0$ (sinon on retranche). En appliquant l'égalité de Parseval à u et u' on a alors :

$$\|u'\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |2i\pi k\hat{u}(k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |2i\pi k\hat{u}(k)|^2$$
$$\|u\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{u}(k)|^2 .$$

Or, $|2\pi\hat{u}(k)|^2 \leq |2\pi k\hat{u}(k)|^2$ et l'inégalité est stricte pour tout $k \notin \{-1,1\}$ dès que $\hat{u}(k) \neq 0$. On a donc bien le résultat annoncé avec égalité si et seulement si $\hat{u}(k) \overset{\forall k\notin\{1,-1\}}{=} 0$. □

2.2 Inégalité isopérimétrique

On considère un lacet C^1 (ou C^1 par morceaux) dans $\mathbb{C}$, simple (sans croisement ni tangence) et on note L sa longueur. Par le théorème de Jordan, elle délimite une surface bornée régulière et on note S son aire.

Théorème 2.2. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$L^2 \geq 4\pi S$$

avec égalité si et seulement si la surface est un disque.

Démonstration. Soit $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ une paramétrisation positive du lacet. On note $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Quitte à faire une homothétie, on peut supposer que $|\gamma'(s)| \overset{\forall s}{=} 1$ et donc $L = 1$. On a alors (formule de Stokes, que l'on admet ici)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 (x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds})ds.$$

Or, $\dot{\gamma} = \dot{x} + i\dot{y}$ d'où $\Im(\bar{\gamma}\dot{\gamma}) = x\dot{y} - y\dot{x}$ ce qui donne :

$$S = \frac{1}{2}\Im\left(\int_0^1 \bar{\gamma}\dot{\gamma}ds\right).$$

Or, comme $\gamma \in C^1$, on peut la décomposer en série de Fourier $\sum_n c_n e^{2i\pi nx}$ ainsi que sa dérivé $\sum_n 2i\pi n c_n e^{2i\pi nx}$, et on a par la formule de Parseval

$$4\pi^2 \sum_n |n|^2|c_n|^2 = \int |\gamma'(s)|^2 ds = 1.$$

D'autre part, comme les convergences sont dans L^2, on a que $\sum_{-N}^N 2i\pi n c_n e^{2i\pi nx} \sum_{-N}^N \overline{c_n}e^{-2i\pi nx}$ converge dans L^1 vers $\bar{\gamma}\dot{\gamma}$. D'où :

$$\int_0^1 \bar{\gamma}\dot{\gamma}ds = \lim_N \int_0^1 \sum_{-N}^N 2i\pi n c_n e^{2i\pi nx} \sum_{-N}^N \overline{c_n}e^{-2i\pi nx}dx = \lim_N 2i\pi \sum_{-N}^N n|c_n|^2.$$

On en déduit $4\pi S = 4\pi^2 \sum_n n|c_n|^2 \leq 4\pi^2 \sum_n |n|^2|c_n|^2 = L^2$ et l'inégalité est stricte dès lors que l'un des c_n est non nul pour $n \neq 0, 1$. Le résultat suit. □

3 Traitement du signal

3.1 analyse et synthèse

On considère un signal $u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k(t)$. L'*analyse* du signal est l'application

$$\begin{cases} T : L^2(\mathbb{T}) & \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \qquad\quad u & \mapsto (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

On sait que T est une isométrie bijective. La *synthèse* (ou reconstruction) est l'application $T^* : \ell^2 \to L^2(T)$ définie par $\langle T^*a, u\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{c_k}$ pour $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Ici T^*a n'est autre que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k$ et $T^* = T^{-1}$.

3.2 Filtre linéaire

Définition 3.1. *Une application $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est un* filtre linéaire *si :*

1. *$\mathcal{L}$ est une application linéaire continue.*
2. *Pour tout $l \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\tau_l u) = \tau_l \mathcal{L}(u)$ où $\tau_l(u) = u(t-l)$.*

Théorème 3.2. *Une application $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est un filtre linéaire si et seulement si il existe $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ une suite bornée de nombres complexes telle que $\forall k,\ \mathcal{L}(e_k) = \mu_k e_k$.*

Démonstration. Soit $\eta \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Pour $u \in L^2(\mathbb{T})$, on écrit $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k(t)$ et on vérifie que $\mathcal{L}(u) = \sum_k \eta_k c_k e_k$ définit bien un filtre linéaire. Par les propriétés de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tau_l u)(x) &= \sum_k \eta_k c_k e^{-i\tau x} e^{ikx} \\ \tau_l \mathcal{L}(u)(x) &= \tau_l(\sum_k \eta_k c_k e^{ikx}) = \sum_k \eta_k c_k e^{-i\tau x} e^{ikx}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}$ commute avec les translations. Par ailleurs, par Parseval :

$$\|\mathcal{L}u\|_2^2 = \sum_k |\eta_k c_k|^2 \le \|\eta\|_\infty^2 . \|u\|_2^2.$$

Donc $\mathcal{L}$ est un filtre linéaire (on peut facilement vérifier que la norme d'opérateur de $\mathcal{L}$ est même exactement $\|\eta\|_\infty$).

Dans l'autre sens, on fixe $k \in \mathbb{Z}$ et on écrit $\mathcal{L}e_k = \sum_n c_n^k e_n$ et on observe que $\tau_p e_k(x) = e^{-2i\pi kp} e_k(x)$. On applique la commutativité :

$$\sum_n c_n^k e^{-2i\pi np} e_n = \tau_p(\mathcal{L})(e_k) = \mathcal{L}(\tau_p e_k) = e^{-2i\pi kp} \mathcal{L}(e_k) = \sum_n c_n^k e^{-2i\pi kp} e_n.$$

Par unicité des coefficients de Fourier, on a alors que $e^{-2i\pi kp} c_n = e^{-2i\pi np} c_n$ pour tout n et tout p. Cela donne $c_n \overset{n\neq k}{=} 0$ et on note alors $\eta_k := c_k^k$ qui convient. □

On remarque qu'il est équivalent de demander qu'un filtre commute avec une seule translation τ_p à condition que $e^{-2i\pi np} \overset{\forall n\neq 0}{\neq} 1$, autrement dit si p est irrationnel.

L'exemple le plus classique de filtre linéaire et le filtre passe-bande. Par exemple, le filtre passe-bas : $P_N : \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k \mapsto \sum_{|k|\le N} c_k e_k$ qui à un signe ne garde que les $2N+1$ premières harmoniques (c'est ce que fait l'oreille humaine, en un sens, puisque l'on ne perçoit pas les fréquences ≥ 20000 hertz).

3.3 Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on rappelle qu'alors la transformée de Fourier de f en ξ est définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}dx$.

Théorème 3.3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose :*
- *$\exists C$ tel que $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$*
- *$\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$.*

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.

Démonstration. Notons $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-n)$ alors la série converge normalement sur les compacts par la condition $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$. En particulier, F est continue et on vérifie facilement qu'elle est 1-périodique en réindexant. On calcule alors les coefficients de Fourier de F :

$$\hat{F}(k) = \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi kt} \overset{Fubini}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t-n)e^{-2i\pi kt} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt} \overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ku} f(u)$$

d'où $\hat{F}(k) = \hat{f}(k)$. La série des $\hat{F}(k)$ est sommable donc, comme F est continue elle converge vers F et la convergence et uniforme. On a donc :

$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{-2i\pi mx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x-m)$$

On évalue alors en 0 et le résultat suit. □

On montrera de la même manière en Td que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ vérifie qu'il existe C telle que $\forall x$, $\max(|f(x)|, |f'(x)|) \leq \frac{1}{1+x^2}$ alors pour tout $\lambda \neq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-2i\beta n}{\lambda}} \hat{f}(\frac{n}{\lambda}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\lambda n - \beta).$$

Par exemple, pour la gaussienne $e^{-\lambda x^2}$, avec $\lambda > 0$ très proche de 0, on a $\hat{G}_\lambda(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}\xi^2}$. On a alors par la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\lambda m^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda}m^2}$$

et la série de droite converge bien plus vite que celle de gauche (ce qui peut être très pratique du point de vue de l'analyse numérique) ! On peut essayer avec une calculatrice pour $\lambda = 10^{-2}$.

3.4 Le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist

Le but de cette section est de comprendre le phénomène suivant : " Si une fonction x ne contient pas de fréquence $\geq B$, elle est déterminée par ses valeurs sur un échantillonnage de longueur $1/2B$".

On veut donc pouvoir associer à tout signal (qui ne contient pas de fréquence $\geq B$) une représentation et ceci de manière injective. Si l'on note $1/f_s$ le pas d'échantillonnage (f_s est la "sampling frequency"), on a alors la condition $B \leq f_s/2$, que l'on appelle *Critère de Nyquist*. On utilise les notations classiques du traitement du signal : x est le signal et c'est une fonction de t ; la transformée de Fourier de x, noté X est une fonction de f (les fréquences).

Le cas suivant, très simple, permet de comprendre d'où vient la borne $1/2B$. Soit y une sinusoïde de fréquence f : $y(x) = \cos(2\pi f x)$. On "sample" (échantillonne) avec un pas $p = 1/f_\varepsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a alors $x_n := np$ et on mesure alors la valeur en x_n ce qui donne $e_n := \cos(2\pi n \frac{f}{f_\varepsilon})$.

On réalise le même sampling pour $z = \cos(2\pi(kf_\varepsilon + f)x)$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$. On trouve alors $e'_n = \cos(2\pi \frac{kf_\varepsilon + f}{f_\varepsilon})$ et donc $e_n = e'_n$. On en déduit donc : *Les sinusoïdes qui ont un écart absolu qui est un multiple de la fréquence d'échantillonnage donne les mêmes échantillons.* Et donc, si le signal a un spectre $\subset]-f_\varepsilon/2, f_\varepsilon/2[$, on a une unique fréquence (plus généralement, si le spectre est $\subset f + kf_\varepsilon +]-f_\varepsilon/2, f_\varepsilon/2[$). Cela justifie le critère de Nyquist.

Aliasing Soit X la transformée de Fourier d'un signal $x \in L^1$ à spectre borné :

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi t f} dt$$

vérifie $X(f) = 0$ pour $|f| \geq B$. La formule sommatoire de Poisson (appliquée à X) s'écrit alors :

$$X_s(f) := \sum_{-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} T.x(nT) e^{-2i\pi nTf} \tag{1}$$

où $T = 1/f_s$ est le pas de l'échantillonnage. En effet, considérons $Y := u \mapsto X(f - uf_s)$, on a alors :

$$\mathcal{F}(Y)(t) = \int X(f - uf_s) e^{-2i\pi u.t} du = T \int X(v) e^{-2i\pi(f-v)T.t} dv = T\mathcal{F}(X)(-tT) e^{-2i\pi fT.t}$$

Or, $\mathcal{F}\mathcal{F}x = \mathcal{F}X = \check{x}$ donc $\mathcal{F}(Y) = T.x(tT).e^{-2i\pi fT.t}$ et (1) suit.

D'un autre côté, la fonction $f \mapsto X_s(f)$ est une fonction f_s-périodique qui coïncide avec X sur $[-B, B]$ quand le critère de Nyquist est vérifié. En revanche, si $B \geq f_s/2$ alors les copies $X(f - kf_s)$ se chevauchent : c'est ce phénomène que l'on appelle l'*aliasing* : deux signaux donnent le même X_s et on ne peut pas revenir en arrière.

Reconstruction On suppose que l'on est dans le cadre du critère de Nyquist et on souhaite retrouver le signal x. Considérons pour cela

$$H : f \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } |f| \leq |f_s|/2 \\ 0 \text{ si } |f| > |f_s|/2 \end{cases}$$

de sorte que $X(f) = H(f).X_s(f)$. Or,

$$\mathcal{F}(H)(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi f.t} df = \left[\frac{e^{-2i\pi f.t}}{-2i\pi t} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin \pi t}{\pi t} := \operatorname{sinc}(t)$$

On a donc (dans L^2 par exemple) en prenant la transformée de Fourier (les fonctions sont paires) que $\mathcal{F}\left(\operatorname{sinc}(\frac{t-nT}{T})\right) = TH(f)e^{-2i\pi nTf}$.

Il suit alors de (1) :

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) T H(f) e^{-2i\pi nTf} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) \mathcal{F}\left(\operatorname{sinc}(\frac{t - nT}{T})\right).$$

On prend alors la transformée de Fourier inverse et on obtient la *formule d'interpolation de Whittaker-Shannon* :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(\frac{t - nT}{T})$$

qui permet de répondre à la question initiale.