Université de Picardie Jules Verne
Gabriel Vigny

Convergence des séries de Fourier

1 Coefficients de Fourier, série de Fourier

1.1 Définition et Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le cercle de longueur 1 (et plus généralement $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n). Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ se relève en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 1-périodique : $\forall x,\ \tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)$ et $f(\dot{x}) = f(x)$ pour tout représentant x de $\dot{x} \in \mathbb{T}$. Dans la suite, on identifiera f et $\tilde{f}$.

Définition 1.1. *On dit que $f \in L^1(\mathbb{T})$ si f est mesurable et $\|f\|_1 := \int_0^1 |f| < \infty$.*

En particulier, $f \in L^1(\mathbb{T})$ signifie que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et que f est 1-périodique. On rappelle que $(L^1(\mathbb{T}), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 1. *Montrer que $f \in L^1(\mathbb{T}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ssi $f = 0$ p.p.*

On rappelle qu'une mesure de Radon (sur un espace séparée) est une mesure borélienne, finie sur les compacts et intérieurement régulière (la mesure d'un borélien est égale au supremum des mesures des compacts qu'il contient).

Définition 1.2. *On note $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ (resp. $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$) l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{T}$ (resp. des mesures de Radon positives sur $\mathbb{T}$).*

Comme $\mathbb{T}$ est compact, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ est automatiquement finie. Par ailleurs, comme $\mathbb{T}$ est compact, toute mesure borélienne positive finie est une mesure de Radon. On admet que pour toute $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, il existe deux mesures $\mu\pm \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. On note alors souvent $|\mu| := \inf \mu^+(\mathbb{T}) + \mu^-(\mathbb{T})$ où l'infimum est pris sur toutes les décompositions $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

En notant $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ que l'on munit de la convergence uniforme, on a que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ définit un opérateur linéaire continue sur $C(\mathbb{T})$ par :

$$\langle \mu, f \rangle := \int_{\mathbb{T}} f d\mu$$

puisque $|\langle \mu, f \rangle| \leq |\mu| \|f\|_\infty$. Le théorème de représentation de Riesz affirme même qu'il s'agit d'une caractérisation des mesures de Radon (voir le cours d'analyse fonctionnelle).

Observons enfin que $L^1(\mathbb{T})$ s'injecte dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ via l'injection $f \mapsto (A \mapsto \int_A f)$. Néanmoins, $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ est plus grand que $L^1(\mathbb{T})$. On a par exemple δ_x, le Dirac en x qui définit une mesure de Radon positive finie.

On appelle *caractère* sur un groupe topologique G un morphisme de groupe continu de G dans $\mathbb{C}^*$. On a la proposition-définition suivante :

Définition 1.3. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ le caractère :*

$$e_n : x \mapsto \exp(i2\pi nx).$$

Tout caractère de $\mathbb{T}$ est de la forme e_n pour un $n \in \mathbb{Z}$.

On peut maintenant définir les coefficients de Fourier de $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Définition 1.4. *Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit $\hat{\mu}(n)$, le n-ième coefficient de Fourier de μ par :*

$$\hat{\mu}(n) := \langle \mu, e_{-n} \rangle = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi nx} d\mu(x).$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note également $\hat{f}(n) = c_n(f)$ le n-ième coefficient de Fourier qui vaut donc

$$c_n(f) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi nx} f(x) dx.$$

Remarque 1.5. — C'est bien définit car e_n est continue.

— $c_0(f) = \int f$, $\hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{T})$. Par ailleurs, on a toujours $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$, $|\hat{\mu}(n)| \leq |\mu|$. On a en particulier que

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}), \|.\|_1 \to \ell^\infty(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty$$

est un opérateur linéaire continue de norme 1.

— Dans ce cours, on fait le choix de considérer les fonctions 1-périodiques. On peut aussi considérer les fonctions T-périodiques, $T > 0$ (par exemple $T = 2\pi$). On a alors à la place $e_n = e^{2i\frac{\pi}{T}x}$ et

$$\hat{\mu}(n) := \langle \mu, e_{-n} \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0,T]} e_{-n}(x) d\mu(x).$$

Sachez adapter les résultats sur $\mathbb{T}$ à ce cadre.

Définition 1.6. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombre complexe. On considère la* série trigonométrique $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$. *On dit que la série converge en $x \in \mathbb{T}$ si $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} c_n e_n(x)$ existe.*

Dans le cas où $(c_n) = (\hat{\mu}(n))$ pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, on appelle série de Fourier de μ *la série trigonométrique correspondante. Le polynôme trigonométrique $\sum_{-N}^{N} \hat{\mu}(n) e_n(x)$ est noté $S_N(\mu)(x)$.*

On note également $f(x) \sim \sum_{\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$ pour dire que $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$ est la série de Fourier de f (en x). Cette écriture ne préjuge ni du fait que la série converge ni que la limite est $f(x)$. Le but de ce cours (et de l'analyse de Fourier en général) est alors de répondre aux questions suivantes :

— Quand a-t-on la convergence de la série de Fourier de f (ou μ) ? Vers quoi ? En quels sens (pour quelles topologies) ? Le cadre L^1 n'est pas le bon pour ces questions.

— Quelles propriétés de f peut-on lire sur ses coefficients de Fourier et inversement ?

— Quand peut-on garantir qu'une série trigonométrique est la série de Fourier d'une fonction L^1 ?

Dans des cadres favorables, où f et sa transformée de Fourier coïncident dans un sens fort, on verra alors quels avantages il peut y avoir à travailler avec f sous la forme de sa série de Fourier de f. Dans le reste de cette sous-section, on va voir quels sont les propriétés de f que l'on peut obtenir en restant dans le cadre L^1 (ou $\mathcal{M}(\mathbb{T})$).

Exercice 2. Calculer les coefficients de Fourier de δ_x, la masse de Dirac en x.

Théorème 1.7 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$.*

Démonstration. Si f est C^1 sur $\mathbb{T}$ alors, on a :

$$\begin{aligned} c_n(f') = \int_0^1 f'(x) e^{-2i\pi nx} dx &= \left[f(x)e^{-2i\pi nx}\right]_0^1 + \int_0^1 2i\pi n f(x) e^{-2i\pi nx} dx \\ &= \int_0^1 2i\pi n f(x) e^{-2i\pi nx} dx = 2i\pi n c_n(f) \end{aligned}$$

en intégrant par partie et en utilisant la périodicité. En particulier, pour $n \neq 0$:

$$|c_n(f)| \leq \frac{|c_n(f')|}{2\pi|n|}dx \leq \frac{\|f'\|_1}{2\pi|n|} \to 0.$$

Pour $f \in L^1$, on peut approcher f par $\tilde{f} \in C^1$ de sorte que $\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors pour $n \neq 0$, en utilisant la continuité de $\mathcal{F}$ et le résultat pour les fonctions C^1 :

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - \tilde{f})| + |c_n(\tilde{f})| \leq \varepsilon + \frac{\|\tilde{f}'\|_1}{2\pi|n|}.$$

Cette quantité est donc $\leq 2\varepsilon$ pour n assez grand et le résultat suit. $\square$

Corollaire 1.8. *Pour $f \in C^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a que $c_n(f') = 2i\pi n c_n(f)$. En particulier, on a que $nc_n(f) \to 0$ quand $|n| \to \infty$.*

Il suffit d'appliquer la preuve précédente.

Pour conclure, on introduit la notion de produit de convolution sur $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $L^1(\mathbb{T})$ et on étudie son lien avec $\mathcal{F}$.

Définition 1.9. *Soient ν et μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, on définit alors $\nu * \mu$, le* produit de convolution *(commutatif) de μ et ν par :*

$$\forall \psi \in C(\mathbb{T}),\ \langle \nu * \mu, \psi \rangle := \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \psi(x+y)d\nu(x)d\mu(y).$$

Proposition 1.10. *Pour ν et μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, on a que $\nu * \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $|\nu * \mu| \leq |\nu|.|\mu|$.*
Dans le cas où f et g sont dans L^1, on a $f * g \in L^1$ et

$$x \text{ p.p}, f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où μ et ν sont des mesures positives. Le résultat suit alors du théorème de représentation de Riesz et de Fubini-Tonelli.
Pour f et g dans L^1, on vérifie $f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt$ et on conclut par Fubini. $\square$

Proposition 1.11. *Pour ν et μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a que $\widehat{\nu * \mu}(n) = \hat{\nu}(n).\hat{\mu}(n)$. Autrement dit, l'application $\mathcal{F} : (\mathcal{M}, +, *, .) \to (\ell^\infty, +, \times, .)$ est un morphisme d'algèbre.*

Un autre intérêt de la convolution est de régulariser les fonctions. Cela se fait classiquement par un noyau de sommabilité

Définition 1.12. *Une suite (k_n) de fonctions mesurables $k_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est un* noyau de sommabilité *si*

1. *$\forall n,\ \int_{\mathbb{T}} k_n = 1$,*
2. *$\exists C > 0,\ \forall n,\ \int_{\mathbb{T}} |k_n| \leq C$,*
3. *$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \int_{[\epsilon, 1-\epsilon]} |k_n| \to 0$.*

Bien sûr, on peut aussi avoir des noyaux de sommabilité qui dépendent d'un paramètre réel (qui tend vers 0 en général) et la condition 2 est redondante dans le cas de noyau positif.

Théorème 1.13. *Soit (k_n) un noyau de sommabilité. Alors*

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $k_n * f \to f$ dans L^1. De plus si f est continue en x alors $k_n * f(x) \to f(x)$*

2. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$, alors $k_n * f \to f$ uniformément.*

Proposition 1.14. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et k une fonction de $C^k(\mathbb{T})$ alors $k * f$ est de classe C^k et $(k * f)^{(j)} = k^{(j)} * f$ pour $j \leq k$.*

En utilisant l'existence de fonction C^∞ à support compact (voir TD), on en déduit alors la densité des fonctions C^∞ dans L^1 (ou L^p).

1.2 Estimations des coefficients de Fourier

Le but de cette sous-section et de fournir différentes estimées sur les coefficients de Fourier d'une fonction. On introduit pour cela différents espaces fonctionnels.

Définition 1.15. *Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_p := (\int_0^1 |f|^p)^{1/p} < \infty$.*

En particulier, pour $p = 2$, on a l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}.$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a donc que $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle_2$ (attention au conjugué).

Définition 1.16. *Pour $0 < \alpha \leq 1$, on note $C^\alpha(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions α-höldériennes f ; c'est-à-dire que $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{T},\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

On note alors :

$$\|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in \mathbb{T}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Attention : $|x - y|$ désigne la distance dans $\mathbb{T}$ (autrement dit le minimum des distances entre les représentants de x et y dans $\mathbb{R}$). Par exemple, ϵ et $1 - \epsilon$ sont à une distance 2ϵ pour ϵ assez petit. On a encore (voir le cours d'analyse fonctionnelle) que $(C^\alpha(\mathbb{T}), \|.\|_{C^\alpha})$ est un espace de Banach.

Définition 1.17. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est absolument continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble fini $([x_k, y_k])_{k \leq N}$ d'intervalles de I d'intérieurs deux à deux disjoints tel que $\sum_k |x_k - y_k| < \delta$, alors $\sum_k |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon$.*

Clairement, si f est absolument continue alors f est continue.

Proposition 1.18. *On a l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *f est absolument continue.*
2. *il existe $g \in L^1(I)$ tel que pour tout x, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ ($a \in I$).*

On admet la proposition (voir le TD pour le sens $2 \implies 1$). On dira qu'une fonction est absolument continue sur $\mathbb{T}$ si sa restriction à $[0, 1[$ l'est.

Proposition 1.19.

1. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ absolument continue, alors il existe $K \geq 0$ tel que $|nc_n(f)| \leq K$.*
2. *Soit $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ ($0 < \alpha \leq 1$), alors il existe $K \geq 0$ tel que $|n^\alpha c_n(f)| \leq K$.*

Démonstration. Pour le premier point, on écrit $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \neq 0$:

$$c_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^x g(t)dt \right) e^{-2i\pi nx} dx \overset{\textbf{Fubini}}{=} \int_0^1 g(t) \left(\int_0^1 1_{[t,1]}(x) e^{-2i\pi nx} dx \right) dt.$$

Or, $\int_0^1 1_{[t,1]}(x)e^{-2i\pi nx}dx = \left[\frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi nx}\right]_t^1$ donc $|\int_0^1 1_{[t,1]}(x)e^{-2i\pi nx}dx| \leq \frac{1}{\pi n}$. Le résultat suit.

Le deuxième point est une conséquence immédiate du Théorème 1.21 (Zygmund) ci-dessous.

□

On rappelle la notion de module de continuité :

Définition 1.20. *Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{C}$. On appelle module de continuité la fonction $\omega : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \cup \{\infty\}$ définie par*

$$\omega(\delta) := \sup_{y,x \in E, d(x,y) \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

On a alors $\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta) = 0 \iff f$ est uniformément continue.

Théorème 1.21. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, de module de continuité ω et 1-périodique alors :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ |c_k(f)| \leq \frac{1}{2}\omega(\frac{1}{2k})$$

Démonstration. Soit $k \neq 0$. On a alors, par périodicité :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx = \int_0^1 f(x + \frac{1}{2k})e^{-2i\pi k(x+\frac{1}{2k})}dx = \int_0^1 -f(x + \frac{1}{2k})e^{-2i\pi kx}dx$$

On a alors en sommant les deux écritures de $c_k(f)$:

$$2c_k(f) = \int_0^1 \left(f(x + \frac{1}{2k}) - f(x + \frac{1}{2k}) \right) e^{-2i\pi kx}dx$$

d'où :

$$2|c_k(f)| \leq \int_0^1 \omega(\frac{1}{2k})dx \leq \omega(\frac{1}{2k}).$$

□

On renvoie au TD pour un résultat du même type sur les fonctions en escaliers.

2 Convergence ponctuelle de la série de Fourier

Le but de cet section est d'établir des critères raisonnable de convergence de la série de Fourier et en particulier le théorème de Dirichlet. Observons d'abord que pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a

$$S_n(f)(x) = \sum_{-n}^{n} \langle f, e_{-k} \rangle e_k(x) = \langle f(t), \sum_{-n}^{n} e^{2i\pi k(x-t)} \rangle = f * D_n(x)$$

où $D_n(x) = \sum_{-n}^{n} e^{2i\pi kx}$ est le *Noyau de Dirichlet*. Par la section précédente, on aurait la convergence dans L^1 (ou uniforme pour les fonctions continues) si ce noyau était un noyau de sommabilité (quand $n \to \infty$). Ce n'est pas le cas car on n'a pas ces convergences. Néanmoins, il est intéressant d'explorer les propriétés de D_n pour mieux comprendre la convergence des séries de Fourier.

Remarque 2.1. Si f n'est pas continue, on ne peut pas avoir la convergence uniforme de $(S_n(f))$ (fonctions continues car ce sont des polynômes trigonométriques) vers f.

Observons d'abord que

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{e^{-2i\pi nx} - e^{2i\pi(n+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}} \\ &= \frac{e^{i\pi x}\left(e^{-2i\pi(n+\frac{1}{2})x} - e^{2i\pi(n+\frac{1}{2})x}\right)}{e^{i\pi x}\left(e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}\right)} \\ &= \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)} \end{aligned}$$

Proposition 2.2. — *Pour tout n, D_n est à valeurs réelles.*
— $\int_{\mathbb{T}} D_n = 1$
— *Il existe $c > 0$ tel que $\int_{\mathbb{T}} |D_n(x)| \geq c \log n$.*

Les points 1 et 2 sont clairs. On prouvera 3 en TD. Il découle de la proposition que D_n n'est pas une approximation de l'unité. Néanmoins, on a :

Théorème 2.3 (Dirichlet)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$ tels que*

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ existent.

2. $\exists \alpha > 0$ tel que les intégrales $\int_0^\alpha \frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|}{t}dt$ et $\int_0^\alpha \frac{|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{t}dt$ convergent.

Alors, $S_n(f)(x_0)$ converge vers $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Démonstration. Posons $\tilde{f}(x_0) := \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$. On a alors, par imparité du sinus :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\sin(\pi t)} f(x_0 - t)dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\sin(\pi t)} f(x_0 - t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\sin(\pi t)} f(x_0 + t)dt. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition précédente ($\int_{\mathbb{T}} D_n = 1$), on reconnaît alors :

$$S_n(f)(x_0) - \tilde{f}(x_0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi(2n+1)t) \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+) + f(x_0-t) - f(x_0^-)}{\sin(\pi t)} dt.$$

Le terme dans la fraction est alors une fonction intégrable par hypothèse et on conclut en appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue (on l'a prouvé pour e_n mais on peut remplacer par $\sin(\pi(2n+1)t)$, la preuve reste identique). □

On retrouve donc les théorèmes classiques : si f est C^1 par morceaux, alors en tout point x la série de Fourier de f converge vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$; pour f α-Hölder, on a, en regardant la preuve, que la série de Fourier converge uniformément vers f. On a aussi le corollaire :

Corollaire 2.4. *Si f et g sont dans L^1 et coïncident au voisinage de x_0, alors $S_n(f)(x_0)$ converge si et seulement si $S_n(g)(x_0)$ et dans ce cas leurs limites sont les mêmes.*

Exercice 3. Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(\theta) = (\pi - \theta)^2/4$ pour $0 \leq \theta < 2\pi$. Montrer que :

$$g(\theta) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_1^\infty \frac{\cos(n\theta)}{n^2}.$$

Etudier la convergence uniforme de cette série. Trouver de jolies formules en calculant la valeur en certains points.

On montrera en TD :

Proposition 2.5. *Il existe $f \in C(\mathbb{T})$ telle que* $\limsup S_n(f)(0) = +\infty$.

On a également le phénomène de Gibbs (voir TD). Pour contourner ces difficultés, Fejér introduit les moyennes de Cesàro des $S_n(f)$. Cela revient à considérer le noyau de Fejér :

$$F_n := \frac{1}{n+1} \sum_0^n D_k$$

car on a alors :

$$\frac{1}{n+1} \sum_0^n S_k(f) = \frac{1}{n+1} \sum_0^n f * D_k = f * F_n.$$

Proposition 2.6. *Le noyau de Fejér $(F_n)_n$ est un noyau de sommation.*

Démonstration. Calculons d'abord une autre expression de F_n :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_0^n \frac{\sin(\pi(2k+1)t)}{\sin(\pi x)} \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin(\pi x)} \mathrm{Im} \left(\sum_0^n \exp(2i\pi k x) \exp(i\pi x) \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin(\pi x)} \mathrm{Im} \left(e^{i\pi x} \frac{1 - e^{2i\pi(n+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)\sin(\pi x)} \mathrm{Im} \left(\frac{1 - e^{2i\pi(n+1)x}}{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}} \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\sin^2(\pi x)} \mathrm{Im}\ i \left(1 - e^{2i\pi(n+1)x} \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\sin^2(\pi x)} \left(1 - \cos(2\pi(n+1)x) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2((n+1)\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \geq 0.
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\int_{\mathbb{T}} |F_n(x)| dx = \int_{\mathbb{T}} F_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_0^n \int D_k = 1$$

donc F_n vérifie les deux premières conditions d'un noyau de sommabilité. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a que $|\sin^2(\pi x)| \geq c(\varepsilon) > 0$ sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ($c(\varepsilon)$ est une constante qui dépend de ε). Donc $|F_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} c(\varepsilon)^{-1}$ sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Le résultat suit en intégrant. □

En appliquant les propriétés d'un noyau de sommation, on déduit :

Théorème 2.7 (Fejér)**.**
— *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $F_n * f \to f$ dans L^1.*
— *Soit $f \in C(\mathbb{T})$, alors $F_n * f \to f$ uniformément.*

Corollaire 2.8 (Théorème de Weierstrass)**.** *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* $(C(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$

On peut alors prouver les résultats d'injectivité suivant :

Proposition 2.9. *La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty$ est injective.*

Démonstration. Considérons $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$. Alors, $F_n * f \to 0$ dans L^1 car les coefficient de $F_n * f$ sont déduit linéairement de ceux de $S_n(f)$; par le théorème de Fejér, $F_n * f \to f$ dans L^1 donc $f = 0$ par unicité de la limite. □

Proposition 2.10. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\sum_n c_n(f)e_n$ converge uniformément alors f est continue et $\sum_n c_n(f)e_n$ converge normalement vers f.*

Démonstration. La suite des moyennes de Cesàro d'une suite convergente est convergente. Donc $F_n * f$ converge uniformément vers g qui est continue comme limite uniforme de fonctions continues. Par ailleurs, $F_n * f \to f$ dans L^1 donc quitte à extraire presqua partout. En particulier, $f = g$ presque partout donc dans L^1. On en déduit que f est continue (admet un représentant continu en toute rigueur) et que $f = g$ donc la convergence de $\sum_n c_n(f)e_n$ vers f est uniforme. □

Voici un résultat complémentaire (on renvoie au TD pour la définition de fonction à variation bornée, rappelons qu'une telle fonction f admet une limite à gauche et à droite en tout point et on note $\tilde{f}(x) = (f(x^+) + f(x^-))/2$).

Théorème 2.11 (Jordan)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ à variation bornée, alors $S_n(f)(x) \to \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.*

Lemme 2.12. *Soit (u_k) une suite et $A > 0$ tels que $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}$. On pose $S_n := \sum_0^n u_j$ et $\sigma_n = \frac{S_0+\cdots+S_n}{n+1}$. On suppose que $\sigma_n \to L$ et on note $d_n \to 0$ en décroissant tel que $|\sigma_n - L| \leq d_n$. ALors :*

$$|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1 + A)\sqrt{d_{n-1}}.$$

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned} k(S_n - L) - (n + k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L) &= kS_n - (n + k)\sigma_{n+k-1} + n\sigma_{n-1} \\ &= kS_n - (S_0 + \cdots + S_{n+k-1}) + S_0 + \cdots + S_n \\ &= kS_n - (S_n + \cdots + S_{n+k-1}) \\ &= -u_{n+1} - 2u_{n+2} - \cdots - (k - 1)u_{n+k-1}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$|k(S_n - L)| \leq (n + k)d_{n+k-1} + nd_{n-1} + A\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n + j + 1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} |S_n - L| &\leq (1 + \frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{A}{k}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n + j + 1} \\ &\leq (1 + \frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{A(k - 1)^2}{k(n + 2)} \\ &\leq (1 + \frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{A(k - 1)}{2(n + 2)}. \end{aligned}$$

On optimise le terme de droite en choisissant $k - 1 = [2n\sqrt{d_{n-1}}]$ (de sorte que $2n\sqrt{d_{n-1}} - 1 < k - 1 \leq 2n\sqrt{d_{n-1}}$). On a alors :

$$\begin{aligned} |S_n - L| &\leq d_{n-1} + \frac{2nd_{n-1}}{2n\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{A2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n + 2)} \\ &\leq d_{n-1} + \sqrt{d_{n-1}}(A + 1). \end{aligned}$$

□

On a par ailleurs :

Lemme 2.13. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ à variation bornée, alors $F_n * f \to \tilde{f}$ simplement.*

Démonstration. La preuve est classique :

$$\begin{aligned} F_n * f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (f(x-t) + f(x+t)) F_n(t) dt \end{aligned}$$

donc :

$$F_n * f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (f(x-t) + f(x+t) - 2\tilde{f}(x)) F_n(t) dt$$

Par hypothèse, le terme $(f(x-t) + f(x+t) - 2\tilde{f}(x))$ est petit pour t petit et bornée sinon. On peut donc conclure par les propriétés de (F_n). □

Démonstration du Théorème 2.11. On applique le lemme 2.12 à $S_n = S_n(f)(x)$, $\sigma_n = F_n * f(x)$ et $u_n = c_n(f)e^{i2\pi nx} + c_{-n}(f)e^{-i2\pi nx}$ (sauf pour $n = 0$ où on divise par 2). D'après le Td, $|u_n| \leq \mathrm{Var}(f)/\pi$ et on peut conclure par le lemme précédent. □

Remarque 2.14. Si f est à variation bornée et continue, on a la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f car on a la convergence uniforme de $F_n * f$ vers f.

3 Dans L^2

C'est "le" meilleur endroit pour considérer les séries de Fourier ! En effet, on va montrer que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ réalise une isométrie. Il y a donc une correspondance "exacte" entre f et sa série de Fourier dans ce cadre.

3.1 Théorème de Parseval

Proposition 3.1. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$*

On rappelle, à tout hasard, qu'une base hilbertienne n'est pas une base : il s'agit d'une famille orthonormée telle que l'espace vectoriel qu'elle engendre et dense dans L^2. On peut donc avoir besoin d'une infinité de coefficients non nuls pour décomposer un vecteur dans la base hilbertienne.

Démonstration. Le fait que la famille est orthonormée est immédiat par les propriétés de l'exponentielle complexe. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbb{Z})$. Pour cela, on prend $f \in L^2$. On considère sa $f * F_n$ (les moyennes de Cesàro de sa série de Fourier). Par les propriétés du noyau de Fejér, on a que $f * F_n \to f$ dans L^2 (voir TD pour le résultat de convergence). Le résultat suit. □

Corollaire 3.2 (Parseval)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors :*

1. $\forall n \geq 0$, $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ *(inégalité de Parseval) ;*
2. $\lim_n \|S_n(f) - f\|_2 = 0$.
3. $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *et* $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_{\mathbb{T}} |f|^2$ *(égalité de Parseval).*

4. Pour f et g dans $L^2(\mathbb{T})$, on a l'identité

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \int_0^1 f(t)\bar{g}(t)$$

Démonstration. Le premier point est simplement le théorème de Pythagore. Pour le deuxième point, on a alors que $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \in L^2$ avec $\| \sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n\|_2 \leq \|f\|_2$. Mais alors $f-\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \in L^2$ est dans l'orthogonal de F : c'est le vecteur nul. Le troisième point est une simple reformulation des précédents puisque $\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{-n}^{n} |c_k(f)|^2$. Finalement, le troisième point suit par continuité du produit scalaire (clair si f est un polynôme trigonométrique et on passe à la limite). □

Exercice 4. Reprendre l'exercice 3 et trouver une nouvelle formule en appliquant l'égalité de Parseval.

Théorème 3.3. *Soit $(c_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors $\exists f \in L^2(\mathbb{Z})$ telle que $\forall n,\ \hat{f}(n) = c_n$. En particulier,*

$$\begin{cases} \mathcal{F}: & L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ & f \mapsto (\hat{f}(n)) \end{cases}$$

est une isométrie.

La preuve est évidente, il suffit de prendre $f = \sum_n c_n e_n$.

Corollaire 3.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, on peut extraire une sous suite de $S_n(f)$ qui converge vers f presque partout (en particulier, c'est vrai pour f continue).*

Théorème 3.5 (Carleson). *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors $S_n(f)$ converge vers f presque partout (en particulier, c'est vrai pour f continue).*

Il s'agit d'un théorème très difficile (et hors programme). On peut l'étendre à L^p pour $p > 1$ mais c'est faux pour $p = 1$. On a déjà prouvé le résultat précédent à l'aide du noyau de Fejér mais la théorie L^2 permet d'en donner une autre preuve.

Corollaire 3.6. *Soient f et g dans L^2 telles que $c_n(f) \overset{\forall n}{=} c_n(g)$ alors $f = g$. De même, si f et g sont dans L^1 avec $c_n(f) \overset{\forall n}{=} c_n(g)$ alors $f = g$.*

3.2 Applications pour la convergence ponctuelle

Grâce aux informations fournit par le Théorème de Parseval, on va améliorer certains des résultats de convergence. Par exemple, on déduit :

Proposition 3.7. *Soit $f \in C^k(\mathbb{T})$, alors il existe une suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que $c_n(f) \overset{\forall n\neq 0}{=} (2i\pi n)^{-k} a_n$.*

Démonstration. Pour $k = 0$, c'est clair car $f \in L^2(\mathbb{T})$. Sinon, on a par le Corollaire 1.8 que $c_n(f) \overset{\forall n\neq 0}{=} (2i\pi n)^{-k} c_n(f^{(k)})$ qui permet de conclure car $(c_n(f^{(k)})) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. □

Proposition 3.8. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$ C^1 par morceaux alors $\sum_n c_n(f)e_n$ converge vers f normalement.*

Démonstration. Soit f' la fonction qui vaut f' là où la dérivée est bien défini et 0 ailleurs. Alors f' est continue par morceaux donc dans L^2. On a $c_n(f') = (2i\pi n)c_n(f)$ (la preuve est la même que pour le Corollaire 1.8) donc $(c_n(f))$ s'écrit comme le produit de deux suites de $\ell^2(\mathbb{Z})$ ($(n^{-2})_{n\neq 0}$ est sommable). En particulier, la série $\sum_n c_n(f)$ est absolument convergente d'où la convergence normale ($\|e_n\|_\infty = 1$.) □

Observons que dans l'autre sens, on a :

Théorème 3.9. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbb{N}$. S'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall n$, $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|k|^{|n|+1+\varepsilon}}$ alors $f \in C^k$.*

Démonstration. Pour $k = 0$, l'hypothèse implique alors la convergence normale et on conclut par la Proposition 2.10. Ensuite on montre le résultat par récurrence immédiate Corollaire 1.8. □

Remarque 3.10. On n'arrive pas à avoir une caractérisation exacte du fait d'être C^k par les coefficients de Fourier (seulement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes). C'est en fait naturel : la régularité d'une fonction est une donnée locale alors que les coefficients de Fourier sont des données globales.

Théorème 3.11 (Bernstein)**.** *Soit $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$, $\alpha > 1/2$ alors $S_n(f) \to f$ normalement.*

Soit $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$. On note K la constante telle que :

$$\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

Lemme 3.12. *Soit $g_h(x) = f(x + h) - f(x - h)$. Alors*

$$\int_0^1 |g_h|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} 4|sin(2\pi nh)|^2|\hat{f}(n)|^2$$

et donc :

$$4\sum_{-\infty}^{\infty} |sin(2\pi nh)|^2|\hat{f}(n)|^2 \leq K^2(2h)^{2\alpha}.$$

Démonstration. On calcule les coefficients de Fourier de g :

$$\begin{aligned}\hat{g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} (f(x + h) - f(x - h))e^{-2i\pi nx}dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2i\pi n(x-h)}dx - \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2i\pi n(x+h)}dx \\ &= 2i \sin(2\pi nh)\hat{f}(n).\end{aligned}$$

Le lemme suit par Parseval et l'inégalité $|g_h(x)| \leq K(2h)^\alpha$. □

Lemme 3.13. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\sum_{2^{p-1}+1}^{2^p} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2}{2^{2\alpha p+1}}.$$

Démonstration. On applique le lemme précédent à $h = \frac{1}{2^{p+2}}$:

$$\sum_{2^{p-1}+1}^{2^p} |\sin(\frac{2\pi n}{2^{p+2}})|^2|\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2 2^{2\alpha}}{2^{2\alpha p+2\alpha+2}} = \frac{K^2}{2^{2\alpha p+2}}.$$

Pour $2^{p-1} < |n| \leq 2^p$, on a $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi n}{2^{p+2}} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $|\sin(\frac{2\pi n}{2^{p+2}})|^2 \geq \frac{1}{2}$. Le lemme suit. □

Preuve du Théorème de Bernstein. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{2^{p-1}+1}^{2^p} |\hat{f}(n)|\right)^2 \leq 2^{p-1} \sum_{2^{p-1}+1}^{2^p} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{C}{2^{p(2\alpha p-1)}}.$$

où $C = \frac{K^2}{4}$. Le résultat suit puisque la série des $\frac{C}{2^{p(\alpha p-1/2)}}$ est convergente (série géométrique de raison < 1 car $\alpha > 1/2$). □

3.3 Espaces de Sobolev

On admet les résultats de cette partie. L'intérêt est de voir que l'on peut considérer des espaces de Hilbert adaptée aux séries de Fourier.

Définition 3.14. *Soit $f \in L^2(_{\mathbb{T}})$. On dit que f admet une dérivée faible $g \in L^2(\mathbb{T})$ si*

$$\left\| \frac{f(.+h) - f(.)}{h} - g \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right|^2 \overset{h \to 0}{\to} 0.$$

Théorème 3.15. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors f admet une dérivée faible jusqu'à l'ordre s dans $L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big((1+|k|^s)|\hat{f}(k)|\Big)^2 < \infty$.*

On note alors $H^s(\mathbb{T})$ l'ensemble des f admettant une dérivée faible jusqu'à l'ordre s dans $L^2(\mathbb{T})$ et on a un espace de Hilbert quand on le munit de la norme

$$\|f\|_{H^s} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big((1+|k|^s)|\hat{f}(k)|\Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 3.16 (Théorème d'injection de Sobolev)**.** *Soit $f \in H^s(\mathbb{T})$, alors $\forall k \neq 0$, $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^s}$ et donc si $s > n+1$ alors $f \in C^n(\mathbb{T})$.*

4 Transformée d'Abel

Le but de cette question est de voir dans quel cas une série trigonométrique $\sum_n c_n e_n$ est la série de Fourier d'une fonction. Bien sûr, un critère nécessaire, par le Théorème de Riemann Lebesgue est que $c_n \to 0$. On a des critères suffisants très simples par ce qui précède (si la série des c_n est sommable ou de carré sommable par exemple) mais on souhaite des résultats plus fins.

Une des grandes idées, très utile en pratique (surtout pour l'agrégation), et d'utiliser la transformée d'Abel. On verra en TD quelques applications plus poussées qui répondent effectivement à la question mais commençons par la version la plus simple.

Théorème 4.1. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ≥ 0 qui décroit vers 0. Alors $\sum_n c_n e_n$ converge $\forall x \neq 0$ ($x \in \mathbb{T}$) et la convergence est uniforme en dehors des compacts qui ne contiennent pas 0.*

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{T}$ qui ne contient pas 0 (il suffit de traiter ce cas-là). Pour N et M dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_N^M c_n e_n(x) &= \sum_N^M c_n (D_n(x) - D_{n-1}(x)) \\ &= \sum_N^{M-1} D_n(x)(c_n - c_{n+1}) + c_M D_m(x) - c_N D_{N-1}(x). \end{aligned}$$

C'est cette manipulation que l'on appelle Transformée d'Abel, c'est une version discrète de l'intégration par partie. On a donc, comme c_n est décroissante :

$$\left| \sum_N^M c_n e_n(x) \right| \leq \sum_N^{M-1} |D_n(x)|(c_n - c_{n+1}) + |c_M D_m(x)| + |c_N D_{N-1}(x)|.$$

Or $|D_n(x)| = \frac{|\sin(\pi(2n+1)x)|}{|\sin(\pi x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\pi x)|}$ qui est uniformément bornée par une constante C_K pour tout $x \in K$. Comme $c_n \to 0$, il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_O$, $|c_n| \leq \varepsilon$, d'où :

$$\begin{aligned}\left|\sum_N^M c_n e_n(x)\right| &\leq C_K(c_M + c_{N-1}) + C_K \sum_N^{M-1}(c_n - c_{n+1}) = C_K(c_M + c_{N-1}) + C_K(c_N - c_M) \\ &\leq 2C_K\varepsilon.\end{aligned}$$

Le résultat suit alors en appliquant le critère de Cauchy de la convergence uniforme. □

Le théorème suivant nécessite d'utiliser les coefficients de Fourier en sin et cos (ce que l'on essaye d'éviter un maximum car on se retrouve à considérer des fonctions différentes sin et cos, des normalisations qui changent pour $k = 0$ mais c'est parfois pratique quand on a, par exemple, des fonctions paires ou impaires). Profitons-en pour donner les formules. En effet, on a

$$S_N(f)(t) = \sum_{-N}^N c_n(f)e_n = c_0(f)e_0(t) + \sum_1^N c_n(f)e_n(t) + c_{-n}(f)e_{-n}(t)$$

On remplace alors $e_n(t) = \cos(2\pi nt) + i\sin(2\pi nt)$ et $e_{-n}(t) = \cos(2\pi nt) - \sin(2\pi nt)$ et on regroupe :

$$S_N(f)(t) = c_0(f) + \sum_1^N (c_n(f) + c_{-n}(f))\cos(2\pi nt) + i(c_n(f) - c_{-n}(f))\sin(2\pi nt).$$

Par linéarité de l'intégrale et les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} a_n(f) :=& \quad c_n(f) + c_{-n}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)2\cos(2\pi nt)dt \\ b_n(f) :=& \; i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \int_{\mathbb{T}} f(t)2\sin(2\pi nt)dt \end{aligned}$$

et on note alors $f(t) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k(f)\cos(2\pi kt) + b_k(f)\sin(2\pi kt)$ pour désigner la série de Fourier de f (attention au premier terme).

On a alors le théorème suivant (qui améliore notamment le point 1 de la Proposition 1.19).

Théorème 4.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ avec $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k\cos(2\pi kt) + b_k\sin(2\pi kt)$. Alors $\sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}$ converge et*

1. *$\sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k} = 2\pi\int_{\mathbb{T}} f(t)(\frac{1}{2} - t)dt$.*
2. *La fonction $F := \int_0^x f(t)dt$ vérifie*

$$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k}{2\pi k} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi k}\left(a_k\sin(2\pi kx) - b_k\cos(2\pi kx)\right)$$

   où la deuxième série converge uniformément sur $\mathbb{T}$ et le terme de droite est la série de Fourier du terme de gauche

3. *Si $\alpha \leq \beta$, alors*

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2}dt + \sum_{k=1}^\infty \int_\alpha^\beta \left(a_k\cos(2\pi kt) + b_k\sin(2\pi kt)\right)dt.$$

Lemme 4.3. *Soit $g \in L^1(\mathbb{T})$ définie sur $[0,1[$ par $g(t) = \frac{1}{2} - t$. Alors*

$$g(t) \sim \sum_{k=1} \frac{1}{\pi k} \sin(2k\pi t)$$

et on a la convergence simple de la série de Fourier vers $\tilde{g}$. Il existe une constante $B > 0$ telle que $\forall n, \|S_n(g)\|_\infty \leq B$.

Démonstration. La fonction est impaire, on a donc $a_k(g) = 0$ et il suffit de calculer pour tout k :

$$b_k(g) = 2\int_0^1 (\frac{1}{2} - t)\sin(2\pi kt)dt = -2\int_0^1 t\sin(2\pi kt)dt = 2\left[\frac{t\cos(2\pi kt)}{2\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kt)}{\pi k}dt.$$

On en déduit l'expression de la série de Fourier, la convergence suit de ce que g est C^1 par morceaux.

Pour la majoration de la norme uniforme. Observons d'abord que $S_n(g)' = D_n - 1$ (D_n est le noyau de Dirichlet) et donc :

$$S_n(g)(x) + \frac{x}{2} = \int_0^x D_n(t)dt = \int_0^x \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\sin(\pi t)}dt$$

La fonction $h(t) := \frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}$, $t \in]0,1]$ se prolonge continûment sur $[0,1]$ (exercice facile), on a donc :

$$S_n(g)(x) + \frac{x}{2} = \int_0^x \frac{\sin(\pi(2n+1)t)}{\pi t}dt + \int_0^x \sin(\pi(2n+1)t)h(t)dt$$

La deuxième intégrale dans le terme de droite est $\leq \|h_\infty\|$. Dans la deuxième, on fait le changement de variable $u = \pi(2n+1)t$ et on reconnaît :

$$S_n(g)(x) + \frac{x}{2} = \int_0^{\pi(2n+1)x} \frac{\sin u}{\pi u}du + O(1).$$

Le terme $\int_0^{\pi(2n+1)x} \frac{\sin u}{\pi u}du$ est alors majorée en valeur absolue par $\sup_y |\int_0^y \frac{\sin u}{\pi u}du|$ qui est fini car $\int_0^\infty \frac{\sin u}{\pi u}du$ est une intégrale semi-convergente (exercice classique qu'on peut faire en intégrant par partie). Le lemme suit. □

Preuve du Théorème 4.2. Pour le premier point, considérons la suite

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)S_n(g)(t)dt$$

où g la fonction $\frac{1}{2} - t$. Par le lemme précédent, pour presque tout t, $f(t)S_n(g)(t) \overset{n\to\infty}{\to} f(t)$ et on a la domination $|f(t)S_n(g)(t)| \leq B|f|(t) \in L^1(\mathbb{T})$, par convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t)S_n(g)(t)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)(\frac{1}{2} - t)dt.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)S_n(g)(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\pi k} f(t)\sin(2k\pi t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{2\pi k}$$

ce qui donne le premier point du théorème.

Pour le deuxième point, soit $x \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)g(t)dt &= \int_x^{1+x} f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du \\ &= \int_0^1 f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du + \int_1^{1+x} f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du \\ &\quad - \int_0^x f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du.\end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du &= \int_0^1 f(u)(\frac{1}{2} - u)du + x\int_0^1 f(u)du \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2\pi k} + \frac{a_0 x}{2}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{gathered}\int_1^{1+x} f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du - \int_0^x f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du = \\ \int_0^x f(u)(x - u - \frac{1}{2})du - \int_0^x f(u)(\frac{1}{2} - u + x)du = -F(x).\end{gathered}$$

Finalement, en appliquant le premier point à la fonction $f(.+x) \in L^1(\mathbb{T})$, on a que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)g(t)dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(f(.+x))}{2\pi k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(f(.+x))}{2\pi k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}b_k(f(.+x)) &= 2\int_{\mathbb{T}} f(t+x)\sin(2\pi kt)dt = 2\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(2\pi k(t-x))dt \\ &= 2\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sin(2\pi kt)\cos(2\pi kx) - \sin(2\pi kx)\cos(2\pi kt)\right)dt \\ &= \cos(2\pi kx)b_k(f) - \sin(2\pi kx)a_k(f)\end{aligned}$$

La formule du deuxième point suit. La convergence uniforme est alors liée au fait que $\|f(.+x) - (.+y)\|_1$ tend vers 0 uniformément quand $|x-y| \to 0$. Le troisième point suit par différence. $\square$

Le théorème permet d'échanger formellement intégrale et série dans la série de Fourier alors même que la série de Fourier ne converge pas !