Université de Picardie Jules Verne **Amiens**
Licence 3 de Mathématiques **Année 2019-2020**

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1

1. Soit $(h_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, une suite qui tend vers 0 (dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$). On a alors $\frac{\overline{h_n}}{h_n} = \frac{h_n}{h_n} = 1 \to 1$. D'un autre côté, la suite $(ih_n)_n$ tend également vers 0 dans $\mathbb{C}$ et $\frac{\overline{h_n}}{h_n} = \frac{-h_n}{h_n} = -1 \to -1 \neq 1$ donc la quantité $\frac{\overline{h}}{h}$ n'admet pas de limite quand $h \to 0$ dans $\mathbb{C}$.
   En particulier, si l'on regarde le taux d'accroissement de $f(z) = \bar{z}$ on a
   $$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$
   qui n'admet pas de limite quand $h \to 0$ donc f n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $z, h \in \mathbb{C}$. On calcule par la formule du binôme de Newton :
   $$(z+h)^k - z^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^j z^{k-j} - z^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} h^j z^{k-j} = khz^{k-1} + o(|h|)$$
   car tous les termes de la somme pour $j \geq 2$ ont un facteur h^j avec $j \geq 2$ (qui est bien un $o(|h|)$). On reconnaît que la fonction $z \mapsto z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que sa dérivée est $z \mapsto kz^{k-1}$ puisqu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point.
3. Soît $z \neq 0$ et $h \in \mathbb{C}$ assez petit en module. On calcule en réduisant au même dénominateur :
   $$\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} = \frac{z - (z+h)}{z(z+h)} = -\frac{h}{z(z+h)}.$$
   On divise par h et on fait $h \to 0$:
   $$\frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = -\frac{1}{z(z+h)} \to \frac{-1}{z^2}.$$
   On reconnaît que la fonction $z \mapsto z^{-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que sa dérivée est $z \mapsto \frac{-1}{z^2}$ puisqu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point.
4. $z \mapsto P(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme somme de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ par (2). De même, $z \mapsto Q(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et par composée avec la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ (3), $z \mapsto \frac{1}{Q(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{z,\ Q(z) = 0\}$. Par produit de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*$, on en déduit que
   $$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$$
   est holomorphe en dehors des racines de Q.

Exercice 2 On cherche les solutions entières de l'équation différentielle sur $\mathbb{C}$: $y'' + y = 0$. Autrement dit, on cherche les séries entières de la forme $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$ telles que $f'' + f = 0$. On propose deux méthodes.

1. Première méthode.

   (a) Soit f une solution. Par théorème, on sait que f est C^∞ sur son disque de convergence (qui est $\mathbb{C}$) et que ses dérivées successives sont données par les séries des dérivées successives :

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n.$$

   Par somme, $f''(z) + f(z)$ est encore une série entière de rayon de convergence ∞ qui est la série des sommes terme à terme :

   $$0 = f''(z) + f(z) = \sum_{0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n) z^n.$$

   Par unicité du prolongement analytique, on en déduit que tous les coefficients de la série entière donnant $f''(z) + f(z)$ sont nuls :

   $$\forall n,\ a_n = -(n+2)(n+1)a_{n+2}.$$

   (b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 0$, les coefficients a_n vérifient

   $$\begin{cases} a_{2n} & = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot a_0 \\ a_{2n+1} & = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot a_1 \end{cases}.$$

   Initialisation. Pour $n = 0$, on doit vérifier $a_0 = \frac{(-1)^0}{(0)!} a_0$ et $a_1 = (\frac{-1)^0}{(1)!} a_1$ qui sont vraies car $0! = 1! = (-1)^0 = 1$.

   Hérédité. On suppose le résultat pour un n donné. On a alors par la question a) et l'hypothèse de récurrence :

   $$\begin{cases} a_{2n+2} & = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} a_{2n} = (-1).(-1)^n \frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot a_0 \\ a_{2n+3} & = \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n+1} = (-1).(-1)^n \frac{1}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \cdot a_1 \end{cases},$$

   ce qui termine la récurrence.

   (c) On peut revenir à la définition du rayon de convergence : pour $r \geq 0$, on a que la suite $a_n r^n$ est bornée car $a_n = O(\frac{1}{n!})$ donc $a_n r^n = O(\frac{r^n}{n!})$ qui tend vers 0 par croissance comparée (factorielle tend vers l'infini plus vite que toute suite géométrique). On en déduit que $\mathbb{R} \geq r$ pour tout r donc f qui vérifie les relations du 2 est bien une série entière de rayon de convergence ∞.
   En particulier, on peut alors dériver f comme dans la question 1 et on a bien que $f'' + f = 0$.

2. Deuxième méthode.

   (a) La dérivée au sens réel d'une fonction dérivable au sens complexe sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}$ de la dérivée au sens complexe (ouf !). En effet, on prend $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, alors

   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$$

   (si c'est vrai quand $h \to 0$ dans $\mathbb{C}$, c'est vrai quand $h \to 0$ dans $\mathbb{R}$).
   On en déduit que $f'' + f = 0$ au sens réel.

(b) On sait résoudre l'équation différentielle précédente et on a bien que $f_{\mathbb{R}}(x) \overset{\forall x}{=} a\cos(x) + b\sin(x)$ pour un bon choix de a et b dans $\mathbb{C}$.

(c) Considérons maintenant $g = a\cos(z) + b\sin(z)$ qui est une série entière sur $\mathbb{C}$ de rayon de convergence infini. Par différence, $f - g$ est une série entière sur $\mathbb{C}$ de rayon de convergence infini qui vaut 0 sur $\mathbb{R}$ (ensemble dont tous les points sont d'accumulation). Par unicité du prolongement analytique, on en déduit que $f(z) = g(z) = a\cos(z) + b\sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(d) On a que f défini par la question (c) est bien une série entière sur $\mathbb{C}$ de rayon de convergence infini et on a $f'(z) = -a\sin(z) + b\cos(z)$ donc $f''(z) = -a\cos(z) - b\sin(z)$ donc f est solution du problème dans $\mathbb{C}$.