Université de Picardie Jules Verne **Amiens**
Licence 3 de Mathématiques **Année 2019-2020**

Contrôle continu. 1H

Exercice 1

1. Montrer que la fonction $h \mapsto \frac{\bar{h}}{h}$ n'admet pas de limite quand h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. En déduire que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.
2. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que sa dérivée est $z \mapsto kz^{k-1}$.
3. Montrer que la fonction $z \mapsto z^{-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et que sa dérivée est $z \mapsto \frac{-1}{z^2}$.
4. Soit P et Q deux polynômes à coefficients complexes. Déduire de ce qui précède que
$$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$$
est holomorphe en dehors des racines de Q.

Exercice 2 On cherche les solutions entières de l'équation différentielle sur $\mathbb{C}$: $y'' + y = 0$. Autrement dit, on cherche les séries entières de la forme $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$ telles que $f'' + f = 0$. On propose deux méthodes.

1. Première méthode.
   (a) Soit f une solution, montrer que l'on a la relation
   $$\forall n,\ a_n = -(n+2)(n+1)a_{n+2}.$$
   (b) En déduire que les coefficients a_n vérifient
   $$\begin{cases} a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot a_0 \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot a_1 \end{cases}.$$
   (c) Vérifier que le rayon de convergence de f est bien $+\infty$.
2. Deuxième méthode.
   (a) Soit f une solution du problème. Pourquoi a-t-on que la restriction $f_{\mathbb{R}}$ de f à $\mathbb{R}$ vérifie $f'' + f = 0$ (au sens réel) ?
   (b) En déduire que $f_{\mathbb{R}}(x) \overset{\forall x}{=} a\cos(x) + b\sin(x)$ pour un bon choix de a et b dans $\mathbb{C}$.
   (c) En utilisant l'unicité du prolongement analytique, montrer que $f(z) \overset{\forall z}{=} a\cos(z) + b\sin(z)$.
   (d) Vérifier que f est bien solution du problème.