Espace de Bergman pour l'agreg

Gabriel Vigny

1 Introduction

Le but de cette note est de détailler les propriétés des espaces de fonctions holomorphes qui sont de carré sommable (espace de Bergman) pour une candidate à l'agrégation. De tels espaces sont en fait des espaces de Hilbert et leur définition permet d'introduire un noyau, le noyau de Bergman, aux propriétés sympathiques et surprenantes. La quantité de choses dans cette note est trop importante pour faire un développement d'agreg, mais le candidat pourra piocher ce qui l'intéresse.

Pourquoi cette note ? En fait, après avoir passer du temps à la recherche d'une bonne source, rien ne m'a satisfait pour trois raisons

1. Le noyau de Bergman est un objet classique en analyse complexe, surtout à plusieurs variables, qui fait l'objet de nombreuses recherches. On trouve donc rapidement des sources qui dépassent de très loin le programme de l'agreg (notamment des histoires d'espaces de Bergman avec des poids psh sur des fibrés en droites !).
2. Certaines sources n'insistent pas assez sur le Lemme 2.1 ci-dessous, qui est la clef de cet espace de Bergman. Bilan, des candidates se perdent dans des détails et oublient parfois de montrer ce qui est important.
3. D'autres sources se contentent de travailler sur le disque unité. C'est certes un cadre sympathique mais une large partie de la théorie n'a pas besoin de cette hypothèse.

Enfin, très modestement, je crois que, ce que cette note contient, est parfois assez original et peu connu du jury lui-même (je pense à la proposition 2.7 par exemple). Bien sûr, il est fort probable que la suite soit bourrée de coquilles et comme ce n'est pas dans un livre, un candidat ne peut pas accéder à cette source le jour de l'oral (mais bon, elle peut utiliser les autres sources et compléter par ce qu'elle a compris de cette note).

2 Fonctions holomorphes et espace de Hilbert

On se donne U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et on considère $\mathcal{B}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U de carré sommable sur U muni de la norme (appellé *espace de Bergman* :

$$\|f\|^2 := \int_U |f(z)|^2 d_\lambda(z)$$

associée au produit scalaire hilbertien :

$$\langle f, g\rangle := \int_U f(z)\overline{g(z)} d_\lambda(z).$$

Lemma 2.1. *Soit $f \in \mathcal{B}(U)$, alors*

$$\forall z \in U,\ |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(z, U^c)} \|f\|.$$

En particulier, pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante C_K telle que

$$\|f\|_{\infty,K} \leq C_K \|f\|.$$

Démonstration. Soit $z \in U$ et $r < d(z, U^c)$, on a alors l'égalité de la moyenne

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z,r)} f(t) d\lambda(t)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur la boule $B(z,r)$. Par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z,r)} 1.|f(t)| d\lambda(t) \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{B(z,r)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(z,r)} |f(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \left(\int_U |f(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} d(z, U^c)} \|f\|.
\end{aligned}$$

Le reste de la preuve suit en prenant $C_K = d(K, \mathcal{U}^c) > 0$ (la fonction $z \mapsto d(z, U^c)$ est continue et atteint donc son minimum sur K compacte, et celui est non nul). □

Theorem 2.2. *On a que $\mathcal{B}(U)$ est un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Plus précisément, la convergence dans $L^2(U)$ implique la convergence uniforme sur les compacts de U dans $\mathcal{B}(U)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}(U)$ est complet. Pour cela, on considère une suite de Cauchy (f_n) de $\mathcal{B}(U)$. Pour tout compact K, on a alors, par le lemme précédent :

$$\|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leq C_K \|f_n - f_m\|.$$

En particulier, la suite f_n est une suite de fonctions holomorphes qui est de Cauchy pour la convergence uniforme sur les compacts : elle converge uniformément sur les compacts vers une fonction f holomorphe. Il reste à montrer que $f \in L^2(U)$ et que $f_n \to f$ dans $\mathcal{B}(U)$.

Pour cela, on a que (f_n) est de Cauchy dans $L^2(U)$ (par définition) qui est complet, donc elle converge dans $L^2(U)$ vers une limite $g \in L^2(U)$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \overset{p.s.}{\to} g$ et comme $f_n \to f$ simplement on a $f = g$ dans $L^2(U)$ ce qui termine la preuve. □

Proposition 2.3. *Pour tout $w \in U$, il existe un élément de $\mathcal{B}(U)$ que l'on note $K(w, *) : z \mapsto K(w, z)$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{B}(U), \ f(w) = \langle f(z), K(w, z) \rangle.$$

Démonstration. La forme linéaire $\delta_w : f \mapsto f(w)$ est continue sur $\mathcal{B}(U)$ puisque par le lemme précédent

$$|\delta_w(f)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(w, U^c)} \|f\|.$$

Par le théorème de représentation de Riesz ($\mathcal{B}(U)$ est un espace de Hilbert), on en déduit l'existence de $K(z, w)$. □

On appelle $K(z, w)$ le Noyau de Bergman.

Proposition 2.4. *Pour tout $(z, w) \in U^2$, on a $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$. En particulier, K est anti-holomorphe par rapport à la première variable ($w \mapsto K(\overline{w}, z)$ est holomorphe).*

Démonstration. On applique la propriété de K à $K(w, \star) \in \mathcal{B}(U)$ en z :

$$K(w, z) = \langle K(w, \star), K(z, \star) \rangle = \overline{\langle K(z, \star), K(w, \star) \rangle} = \overline{K(z, w)}.$$

□

Comme $\mathcal{B}(U)$ est un sous espace de Hilbert de $L^2(U)$ qui est séparable, on en déduit qu'il est séparable et il admet donc une base de Hilbert dénombrable. Soit donc $(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ une base hilbertienne de $\mathcal{B}(U)$. Observons que le fait que U soit borné implique que $\mathcal{B}(U)$ est de dimension infinie car il contient déjà tous les polynômes.

Proposition 2.5. *On a :*

$$K(w,z) = \sum_j \overline{\xi_j(w)} \xi_j(z).$$

En particulier, K est continue sur U^2

Démonstration. Fixons $w \in U$, on décompose alors $z \mapsto K(w,z)$ sur la base hilbertienne $K(w,z) = \sum_j a_j(w)\xi_j(z)$. On sait que les coefficients $a_j(w)$ sont donnés par

$$a_j(w) = \langle K(w,\star), \xi_j(\star)\rangle = \overline{\langle \xi_j(\star), K(w,\star)\rangle} = \overline{\xi_j(w)}$$

par définition de $K(w,z)$.

On a besoin du lemme suivant qui contrôle la norme L^2 de $K(w,\star)$ en fonction de la distance de w à U^c.

Lemma 2.6. *Soit $w \in U$, alors*

$$\|K(w,\star)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(w,U^c)}$$

Démonstration. Il s'agit en fait d'une simple réinterprétation de la propriété définissante de K. En effet, on a, $w \in U$ fixé, que

$$\forall f \in \mathcal{B}(U),\ \langle f(\star), K(w,\star)\rangle = \delta_w(f)$$

par ailleurs, la norme d'opérateur de $\delta_w : \mathcal{B}(U) \to \mathbb{C}$ est $\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(w,U^c)}$ (petit rappel, pour une forme L sur un espace vectoriel E, on a que la norme d'opérateur de L est le $\sup_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|}$), donc la norme de $K(w,\star)$ (qui est cette norme d'opérateur) est $\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(w,U^c)}$. □

Pour montrer la continuité de K, il suffit alors de montrer la convergence uniforme de la série

$$\sum_j \overline{\xi_j(w)}\xi_j(z).$$

On montre pour cela la convergence normale sur les compacts de la forme $K \times K$ (K compact de U) ce qui revient à montrer que la série

$$\sum_j \|\overline{\xi_j(w)}\xi_j(z)\|_{\infty, K\times K}$$

converge. Par Cauchy Schwartz, cela revient à montrer la convergence normale de la série

$$\sum_j |\xi_j(z)|^2.$$

On observe pour cela que $\sum_j |\xi_j(z)|^2 = K(z,z) = \langle K(z,\star), K(z,\star)\rangle \leq \|K(z,\star)\|^2$. Par le lemme précédent, on a

$$\|K(z,\star)\|^2 \leq \frac{1}{\pi(d(w,U^c))^2}$$

et le résultat suit. □

Proposition 2.7. *Soit $P : L^2(U) \to H(U)$ la projection orthogonale. Alors, pour tout $\varphi \in L^2(U)$, on a $P\varphi(\star) = \langle \varphi(z), K(\star, z)\rangle$.*

Démonstration. L'opérateur P est continu et autoadjoint en tant que projection orthogonale sur un sous-espace fermé ($\mathcal{B}(U)$ est fermé dans $L^2(U)$ car il est complet).

Soit donc $\varphi \in L^2(U)$. On sait que $P(\varphi) \in \mathcal{B}(U)$ donc par la propriété du noyau de Bergman, pour $w \in U$:

$$P(\varphi)(w) = \langle P(\varphi)(\star), K(w, \star)\rangle = \langle \varphi(\star), P(K(w, \star))\rangle.$$

Or, $P(K(w, \star)) = K(w, \star)$ et le résultat suit. □

3 Cas particulier du disque unité (brouillon car il existe de bonnes sources sur ce passage)

A partir de maintenant, on suppose que $U = \mathbb{D}$ est le disque unité.

Proposition 3.1. *La famille $\left(\xi_n : z \mapsto \frac{\sqrt{n+1}z^n}{\sqrt{\pi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{B}(U)$.*

Démonstration. On calcule, en faisant un changement de variable en coordonnées polaires

$$\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta} r dr d\theta.$$

Par Fubini (tout est intégrable car continu donc borné sur un domaine de mesure finie) :

$$\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} = \int_0^1 r^{n+m+1} dr e^{in\theta} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta.$$

On reconnaît alors que :

$$\langle z^n, z^m \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \frac{\pi}{n+1} \text{ si } n = m \end{cases}.$$

On en déduit que la famille est orthonormale. Il reste à montrer qu'elle est dense. Pour cela, on peut partir d'un élément $f \in \mathcal{B}(U)$. On le décompose en série entière :

$$f = \sum_n a_n z^n.$$

On veut montrer que $a_n = \langle f, \xi_n \rangle$ (ce n'est pas immédiat). On considère pour cela la fonction $f_\theta := z \mapsto f(rz)$. On rappelle que $f_r \to f$ dans $L^2(U)$ (c'est assez standard, on commence par le faire pour des fonctions continues dans U en invoquant la convergence dominée et on découpe dans le cas général en approchant f, dans L^2, par une fonction continue plus un petit changement de variable). Or, pour f_r, le résultat est immédiat car la série entière converge normalement sur D. Autrement dit :

$$a_n(r) = r^n a_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \langle f_r, \xi_n \rangle$$

et le résultat suit. □