IV. Constructions contemporaines des ensembles de nombres

Les entiers naturels

L’ensemble des entiers naturels est noté **IN**

IN= {0,1,2,3,4,……}

sa définition restera ici intuitive, c’est la donnée de base.

C’est la notion de nombre la plus simple.

Les entiers naturels

Il existe sur l'ensemble des entiers naturels deux opérations « naturelles » l'addition + et la multiplication *.

Leurs principales propriétés sont

Pour l'addition : si $\boldsymbol{a,b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des entiers naturels

$\boldsymbol{a+b = b+a}$	l'addition est *commutative*
$\boldsymbol{a+(b+c)= (a+b)+c}$	l'addition est *associative*
$\boldsymbol{0+a= a+0=a}$	0 est *neutre* pour l'addition

Les entiers naturels

Pour la multiplication : si ***a,b*** et ***c*** sont des entiers naturels

a*b = b*a	la multiplication est *commutative*
a*(b*c)= (a*b)*c	la multiplication est *associative*
1*a= a*1=a	1 est *neutre* pour la multiplication
0*a= a*0=0	0 est *absorbant* pour la multiplication

Les entiers naturels

Enfin une propriété mixte : si ***a,b*** et ***c*** sont des entiers naturels

a*(b+c)= a*b +a*c La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition

Noter qu'une priorité est donnée à la multiplication ce qui permet d'éviter de trop nombreuses parenthèses.

Le principe contemporain d'écriture est l'écriture positionnelle en « base » N :

- On choisit **N** symboles qui représenteront les N premiers entiers $\mathbf{C_0,C_1,C_2,\ldots\ldots,C_{N-1}}$ **:** Ce sont les ***chiffres***.

- Nous utilisons couramment les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9 (base 10 ou système décimal)

- En informatique on utilise 0 et 1 (base 2 ou système binaire).

- La notation $\mathbf{C_k C_{k-1}\ldots\ldots C_1}$

Où $\mathbf{C_k\ldots C_1}$ sont des chiffres, désigne le nombre entier

$$\mathbf{C_k * N^k + C_{k-1} * N^{k-1} + \ldots\ldots + C_1}$$

C'est le développement en base N

Propriété de l'écriture positionnelle en « base » N :

Tout entier naturel admet exactement un développement en base N

Cette propriété semble tout à fait anodine, mais on verra que pour d'autres types de nombre elle ne l'est pas.

Les nombres rationnels

La division est une opération mathématique qui apparait dans de nombreux problèmes concrets :

Elle consiste à partager en quantités égales une quantité donnée.

Nous partirons du point de vue d'une personne qui ne connaitrait que l'univers formé par

Les nombres entiers naturels 0,1,2,3,……. Ainsi que l'addition et la multiplication

Les nombres rationnels

En terme d’équation :

Il s’agit de la résolution de

$$b*x=a$$

a et ***b*** sont des entiers donnés et on cherche un entier naturel x (c’est-à-dire un membre de l’univers connus) rendant l’égalité vraie

Les problèmes étant l’*existence* et la *valeur* de ***x***

Si on s’intéresse à ce problème en appliquant un procédé dialectique (thèse , antithèse, synthèse). On obtient la situation suivante :

Les nombres rationnels

- Thèse : Dans certains cas un tel partage est possible :

Une collection de 15 objets peut être partagée en trois collections égales (au sens où elles comptent le même nombre d'objets, ici 5)

Antithèse : Dans d'autre cas ce partage ne peut être exact :

Une collection de 17 objets ne peut être partagée en 3 collections égales

- Synthèse :

On tente de fabriquer un nouvel univers numérique contenant l'univers des entiers naturels dans lequel un partage égal est toujours possible

Les nombres rationnels

On veut que toute les équations ***b*x=a*** se comportent de la même façon

On remarque

1) Comme 0 est absorbant si b=0 on a une situation un peu spéciale : si a=0 n'importe quel x est une solution et si $a\neq 0$ l'équation est sans solution.

2) Alors que si b est non nul il y a ou bien une unique solution ou bien pas du tout.

On exclu les équations de la forme ***0*x=a*** de la famille de problèmes étudiés.

On décide que chaque équation ***b*x=a*** admet une unique solution

La « solution » sera notée **a/b**

***N**otez bien que pour l'instant ce résultat n'est pas toujours un élément de l' «univers connu ».*

L'ensemble des "‘solutions" est noté $\mathbf{Q}^{+}$

Première remarque :

Chaque entier naturel est la solution d'une des équations :

L'entier **a** étant solution de ***1*x=a***

Autrement dit ***a= a/1.***

Si on identifie complétement ***a/1 ,*** c'est-à-dire un élément de **Q^+**

à ***a***, alors **Q^+** contient **IN.**

Deuxième remarque :

Parmi les équations b*x=a certaines donnent le même résultat : ***3*x=15*** (solution ***5***) ; ***4*x= 20*** (solution ***5***); etc

Il est donc possible que deux équations distinctes aient la même solution.

L'entier 5 s'identifie donc non seulement à 5/1 mais aussi à

10/2, 15/3, 20/4…..

Deuxième remarque :

Précisément, si **a/b** et **a'/b'** sont les solutions égales de deux équations et s'identifient à des entiers naturels, alors

$$\mathbf{a'b=b'a}$$

On considérera donc que deux solutions, **a/b** et **a'/b'**, même dans le cas où elles ne représentent pas un entier, représentent le même élément de $\mathbf{Q^+}$ lorsque

$$\mathbf{a'b=b'a.}$$

Chaque nombre rationnel admet donc plusieurs écritures sous la forme **a/b**.

Troisième remarque :

- Dans l’ensemble des entiers on connait l’addition et la multiplication, est-il possible de donner un sens à l’addition et à la multiplication dans l’ensemble des rationnels?

Troisième remarque :

- L'addition :

Soit **a/b** et **c/d** deux nombres rationnels,
d'après la remarque 2 on a **a/b= (a*d)/(b*d) et c/d=(c*b)/(d*b)**

On a donc

$$\mathbf{a/b + c/d = (a*d)/(b*d) + (c*b)/(b*d)}$$

Toute addition se ramène donc à l'addition de rationnels ayant même "dénominateur".

• <u>Troisième remarque</u> :

- L'addition :

Dans le cas où les rationnels **a/b** et **c/b** sont des entiers,
le résultat est bien connu :

Si on divise en **b** parts la quantité **a**, que l’on divise en **b** parts la quantité **c** et que l’on additionne les deux résultats, on obtient le même résultat que si l’on commence par additionner les quantités **a** et **c** puis qu’on divise ce résultat en **b** parts : on a donc

$$\mathbf{a/b+c/b= (a+c)/b}$$

On étend cette formule au cas où **a/b** ou **c/b** ne sont pas des entiers.

• Troisième remarque :

- L'addition :

Pour deux nombres rationnels **a/b** et **c/d** on pose

$$\mathbf{a/b + c/d = (a*d)/(b*d) + (c*b)/(b*d) = (a*d+c*b)/(b*d)}$$

On vérifie que les propriétés initiales de l’addition des entiers naturels sont conservées

$$\mathbf{a/b + c/d = (a*d+c*b)/(b*d) = (c*b+a*d)/(d*b) = c/d+a/b}$$

$$\mathbf{(a/b+c/d)+e/f = a/b+(c/d+e/f)}$$

$$\mathbf{0+a/b = 0/1+a/b = (0*b+a*1)/1*b = a/b}$$

• Troisième remarque :

- La multiplication

Le cas de la multiplication se traite de la même manière, on obtient pour deux nombres rationnels **a/b** et **c/d**

$$\mathbf{(a/b)*(c/d)= (a*c)/(b*d)}$$

La vérification que les propriétés de cette multiplication sont les mêmes que celle de la multiplication des entiers naturels est également facile

- <u>Quatrième remarque</u>

-Soit ***(a/b)*x= (c/d)*** une équation où les nombres rationnels a/b et c/d sont donnés avec ***a/b*** non nul :

Le rationnel ***x= (c*b)/(d*a)*** est solution.

Noter que son existence ne pose pas de problème : ***a*** et ***d*** sont non nuls.

Reste à donner un véritable statut de "nombre" aux nombres rationnels. En particulier à les écrire grâce à un système de numération.

Développement en base N :

Ajout du symbole « , » au système de numération

On ajoute un symbole au système de numération : la "virgule" qui marque le chiffre des "unités".

Les chiffres inscrits "après" la virgule notant successivement les N$^{\text{ièmes}}$, les N$^{\text{ièmes}}$ de N$^{\text{ième}}$, etc...

Ainsi

$$C_kC_{k-1}...C_1, D_1D_2...D_s$$

Note le nombre

$$X= C_kN^k+C_{k-1}N^{k-1}+...+C_{1+} D_1(1/N)+D_2(1/N^2)+...+D_s(1/N^s).$$

C'est le **développement** en base ***N*** de ***X***

Par exemple

- En base 10 :

854,62 est le développement du nombre

$X= 8*10^2+5*10^1+4+6*10^{-1}+2*10^{-2}$

- En base 60

<<II III, <<<III note le nombre

$22*60^1+3+33*60^{-1}$

- En base 2

100101,1101 note le nombre

$1*2^5+1*2^2+1+1*2^{-1}+1*2^{-2}+1*2^{-4}$

Cette amélioration du système de numération n'est en fait pas suffisante pour écrire tous les nombres rationnels (et ceci quelle que soit la base) :

Aussi bien dans le système décimal moderne, que dans le système sexagésimal, il est possible d’écrire l’inverse de certains nombres entiers alors que cela n’est pas possible pour d’autres (les inverses d'entiers sont bien sur des rationnels).

L’explication de ce phénomène est assez simple :

Soit ***n*** un entier naturel : Les nombres ***1*** et ***n*** sont toujours des diviseurs de ***n***

Certains entiers ont des diviseurs strictement compris entre ***1*** et ***n*** d’autres n'en ont pas.

Par exemple ***12*** admet pour diviseurs en outre de ***1*** et ***12*** également ***2,3,4*** et ***6***. Alors que ***13*** n’a pour diviseur que ***1*** et ***13***.

Lorsque ***n*** est un entier naturel qui n'a pas d'autres diviseur que **1** et **n** on dit que c'est un nombre *premier*

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41…

sont des nombres premiers.

<u>**Propriété**</u> **:** ***Tout nombre entier est un produit de nombre premier.***

C'est une évidence : Soit $\boldsymbol{n}$ un entier alors,

si $\boldsymbol{n}$ n'est pas premier, il admet un diviseur $\boldsymbol{d}$ satisfaisant

$$1<d<n$$

Donc il existe un entier $\boldsymbol{k}$ tel que $\boldsymbol{n= dk}$

Si $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{k}$ sont des nombres premiers on a obtenu $\boldsymbol{n}$ comme un produit de deux nombres premiers.

Sinon, $\boldsymbol{d}$ ou $\boldsymbol{k}$ n'est pas un nombre premier donc s'écrit comme le produit de deux nombres qui lui sont inférieurs, tout en étant strictement plus grand que $\boldsymbol{1}$. On réitère le raisonnement jusqu'à obtention de **n** sous la forme

$$\mathbf{n = p_1 p_2 p_3 \ldots . p_\ell}$$

Supposons que le développement en base **N** de l'inverse du nombre entier **X** existe (cela signifie que **X** peut être représenté par une suite finie de chiffres et éventuellement une virgule).

Le développement de **1/X** est donc de la forme $\mathbf{0,D_1D_2\ldots D_k}$ autrement dit

$$\mathbf{1/X = D_1*N^{-1}+D_2*N^{-2}+\ldots.+D_k*N^{-k}}$$
$$\mathbf{= D_1/N+D_2/N^2+\ldots.+D_k/N^k}$$

Si on multiplie **1/X** par $\mathbf{N^k}$ on obtient donc un nombre entier

$$\mathbf{N^k/X = D_1*N^{k-1}+D_2*N^{k-2}+\ldots.+D_k*N}$$

Cela signifie donc que tous les facteurs premiers présents dans **X** se "simplifient" avec des facteurs premiers présents dans $\mathbf{N^k}$ donc avec des facteurs premiers de **N.**

Les nombres entiers dont l'inverse admet un développement dans le système décimal sont ceux qui n’ont comme facteurs premiers que les facteurs premiers de **10**, c’est-à-dire **2** ou **5**.

On retrouve ainsi les entiers **2,4,5** et **8**....
Par suite, les rationnels dont le dénominateur n’admet que les facteurs premiers **2** ou/et **5** possèdent un développement en base **10**. Ces rationnels sont appelés les *nombres décimaux*. Il y a bien sûr des rationnels non décimaux par exemple **1/3**.

Les nombres entiers dont l'inverse admet un développement sexagésimal sont ceux qui n’ont comme facteurs premiers que les facteurs premiers de **60**, c’est-à-dire **2 ,3** ou **5**.....

On retrouve ainsi les entiers **2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,**…. (Les entiers **7,11,13,14,17,..** ont des inverse qui n'admettent pas développement sexagésimal)

Développements illimités

(A partir de maintenant on ne parle plus que de développements en base 10)

Il s'agit d'une nouvelle généralisation du système numérique.

Les développements vu jusqu'ici sont finis : il s'agit d'une succession finie de symboles , les chiffres et éventuellement une virgule.

Un développement illimité est une suite (non finie) de chiffres

$$C_k C_{k-1} \ldots C_1 , D_1 D_2 \ldots D_s \ldots\ldots\ldots$$

Cela note le "nombre"

$$X = C_k N^k + C_{k-1} N^{k-1} + \ldots + C_1 + D_1 (1/N) + D_2 (1/N^2) + \ldots + D_s (1/N^s) + \ldots\ldots$$

Développements illimités

Les rationnels non décimaux admettent

- Un développement illimité
- Pas de développement (fini)

Les rationnels décimaux admettent

- Un développement
- **Deux** développements illimités.

Développements illimités propres

Tout nombre décimal possède 2 développements illimités de base 10 :

Par exemple le nombre **1** peut s'écrire

1,0000000...... mais aussi **0,99999…..**

Pour éviter ce problème on considèrera que les développements finissant par une suite infinie de **9** sont "impropres".

Parmi ces deux développements on privilégie 1,000.... que l'on note en pratique simplement 1 et qui "s'identifie" au développement illimité.

Dans toute la suite tous les nombres décimaux seront notés par leur développement décimal propre c'est-à-dire le développement FINI.

Les nombres rationnels non décimaux n'admettent pas de développement mais admettent un (unique) développement illimité, et celui-ci n'est pas "fini" et ne finit pas par une suite infinie de **9.**

Comment obtenir ce développement illimité?

Soit ***q = a/b*** un nombre rationnel (***a*** et ***b*** sont des entiers avec ***b*** non nul). Pour obtenir le développement illimité de ***q*** on effectue la division en "continuant" après la virgule :

A chaque étape le "reste" est inférieur à **b** : il vaut **0,1,2,3….** ou **b-1**.

Deux cas se présentent :
- On obtient après un certain nombre d'étape un reste égal à 0 : alors le développement décimal de ***q*** est fini et ***q*** est décimal.

- On n'obtient jamais un reste nul mais comme les restes sont dans un ensemble fini il y a au bout d'un certain nombre d'itération une répétition d'un reste déjà apparu, le développement décimal de q devient donc "ultimement périodique".

Exemples :

327	**|_25_____**	**46**	**|_7**
- 25	**13,08**	**- 42**	**|6,5714285....**
77		**40**	
-75		**-35**	
20		**50**	
-00		**-49**	
200		**10**	
-200		**- 7**	
0		**30**	
		-28	
		20	
		-14	
		60	
		-56	
		4	

327/ 25 = 13.08 **et** 46/7=6.571428$\underline{571428}$

Réciproquement, supposons qu'un nombre $\boldsymbol{x}$ ait un développement décimal fini ou ultimement périodique alors

· Si le développement décimal de $\boldsymbol{x}$ est fini, en multipliant $\boldsymbol{x}$ par une puissance de **10** suffisamment grande on obtient un entier $\boldsymbol{A}$ donc
$\boldsymbol{x = A/ 10^n}$

· Si le développement décimal de x est périodique : x s'écrit
$\boldsymbol{x = A, d_1d_2\ldots d_j p_1p_2p_3\ldots p_k \underline{p_1p_2\ldots.p_k}\ldots\ldots.}$

$\boldsymbol{A}$ est la partie avant la virgule : c'est un entier.

$\boldsymbol{d_1,d_2..d_j}$ sont les premières décimales.

$\boldsymbol{p_1p_2\ldots p_k}$ est le motif de décimales qui réapparait indéfiniment en fin de développement.

En multipliant $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{10^j}$ on obtient

$$\boldsymbol{10^j x = B,\, p_1 p_2 p \ldots p_k \overline{p_1 p_2 \ldots . p_k} \ldots\ldots.}$$
$$\boldsymbol{= B + (P/\, 10^k) + (P/10^{2k}) + (P/10^{3k}) + \ldots .}$$

Où $\boldsymbol{B}$ est le nombre entier qu'on obtient en faisant suivre la représentation décimale de $\boldsymbol{A}$ par les premières décimales $\boldsymbol{d_1, d_2 \ldots, d_j}$ de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P}$ est l'entier ayant pour représentation décimale $\boldsymbol{p_1 p_2 \ldots p_k}$.

On montre que la somme infinie

$$(1/\, 10^k) + (1/10^{2k}) + (1/10^{3k}) + \ldots . = \frac{(1/\, 10^k)}{1 - (1/10^k)}$$

c'est donc un rationnel, notons le $\boldsymbol{C.}$

Finalement, $\boldsymbol{x = (\, 1/\, 10^n)\, (\, B + \; PC)}$ donc $\boldsymbol{x}$ est rationnel.

En résumé, un nombre est rationnel si et seulemnt si il admet un développement décimal illimité fini ou périodique.

Il existe bien entendu des développement illimités qui ne sont ni finis ni périodiques, ces développements représentent des "nombres" dit irrationnels.

Un exemple de nombre irrationnel : $\sqrt{2}$

Si $\boldsymbol{x}$ est un nombre rationnel, il s'écrit comme le résultat d'une division d'un nombre entier $\boldsymbol{a}$ par un autre

$$\boldsymbol{x = (a/b)}$$

On peut supposer que la fraction $\boldsymbol{(a/b)}$ n'est pas simplifiable.

Alors, si x est une racine de 2, comme on a

$$2= x^2= (a/b)^2= (a^2/b^2)$$

On a $a^2= 2b^2.$

Donc a^2 est pair donc <u>a est pair</u> :

Il existe un entier a' tel que $a= 2a'$ Donc

$$2= (2a'/b)^2= (4a'^2/b^2)$$

On a alors $b^2=2a'^2$: donc b est aussi pair !

La fraction (a/b) est donc simplifiable : Le nombre x ne peut s'écrire comme une fraction d'entier. Les nombres rationnels ne sont pas suffisants pour comprendre x !

Résumé et notation

Ensemble initial : **N= {0,1,2,3,4,…….}**

Ensemble des rationnels positifs :

C'est l'ensemble des résultats des divisions **a/b** où **a** et **b** sont des entiers naturels (avec **b** différent de **0**).

Il est noté $\mathbf{Q}^{+}$

Les rationnels positifs admettent un développement décimal illimité propre fini ou ultimement périodique.
Ceux qui admettent un développement fini sont appelés les nombres décimaux positifs, leur ensemble est noté $\mathbf{D}^{+}$.
Les décimaux positifs sont les quotients dont le dénominateur est un entier qui n'a comme facteurs premiers que **2** ou **5**.

Les nombres entiers relatifs

Comme la division, la soustraction est une opération mathématique qui apparait dans de nombreux problèmes concrets :

Elle consiste à retrancher une quantité donnée à une quantité fixée.

Encore une fois nous partirons du point de vue de quelqu'un qui ne "connait" que le nombres entiers naturels 0,1,2,3,…….

Les nombres entiers relatifs

En terme d'équation :

Il s'agit de la résolution de

$$a+x=b$$

a et ***b*** sont des entiers donnés et on cherche un entier naturel x (c'est-à-dire un membre de l'univers connus) rendant l'égalité vraie

Les problèmes étant l'*existence* et la *valeur* de ***x***

Si on s'intéresse à ce problème en appliquant un procédé dialectique (thèse , antithèse, synthèse). On obtient la situation suivante :

- Thèse : Dans certains cas il est possible de trouver une solution :

Une quantité de 15 peut être retranchée de 24 le résultat est 9

- Antithèse : Dans d’autre cas cela n'est pas possible :

Une quantité de 17 ne peut être retranchée de 11

- Synthèse : **On tente de fabriquer un nouvel univers numérique contenant l’univers des entiers naturels et dans lequel les équations de la forme a+x=b ont toujours une unique solution**

Les nombres entiers relatifs

On veut que toute les équations $\boldsymbol{a+x=b}$ se comportent de la même façon.

On notera $\boldsymbol{b-a}$ la solution de ce problème l'ensemble des solutions sera noté **Z**

.

Première remarque :

Tous les entiers sont solution d'un tel problème :

L'entier **a** est solution des problèmes

0+x=a , 1+x=a+1,….

Donc l'entier ***a*** vaut ***a-0*** mais aussi ***(a+1)-1*, …….**

Deuxième remarque :

Un même nombre entier naturel être résultat de soustractions distinctes. Précisément, si ***a-b*** et ***a'-b'*** sont des soustractions donnant un même résultat dans **N** alors

$$a'+b=b'+a$$

On considérera donc que, même s'ils ne représentent pas un entier naturel, ***a-b*** et de ***a'-b'*** sont égaux lorsque

$$a'+b=b'+a.$$

Chaque entier relatif admet donc plusieurs écritures sous la forme ***a-b.*** Mais parmi toute les manières d'écrire un entier relatif ***A*** sous la forme ***a-b*** il y en a ou bien

- Une de la forme ***a-0*** **(**dans ce cas ***A*** s'identifie à l'entier naturel ***a***)

- Une de la forme ***0-a*** (alors ***A*** n'est pas un entier naturel on notera ***A= -a*** et on dit qu'il est négatif, c'est l'opposé de ***a***.)

Troisième remarque : Est-il possible de donner un sens à l'addition et à la multiplication pour des entiers relatifs?

L'addition se prolonge facilement on pose

$$\boldsymbol{(a-b)+(c-d)= (a+c)-(b+d)}$$

On vérifie facilement que cela coïncide avec l'addition des entiers naturels, que l'on continue d'avoir commutativité, associativité et que 0 est élément neutre. entiers relatifs ne pose pas de problèmes particuliers.

Troisième remarque : Est-il possible de donner un sens à l'addition et à la multiplication pour des entiers relatifs?

Pour tout entier naturel **a, b** et **c** on a

$$a*(b+c)= a*b+a*c$$

$$a*0=0$$

De plus, **b-b=0** donc si on veut conserver la distributivité :

a*(b+(-b))= a*b+a*(-b)=0.

On doit donc avoir **a*b=(-a)*(-b)**.

D'où la fameuse « règle des signes » :

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes différents est négatif.

Quatrième remarque :

Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux entiers relatifs l'équation $\boldsymbol{A+x=B}$

Admet toujours une unique solution si

$\boldsymbol{A= a-a'}$ et $\boldsymbol{B=b-b'}$

la solution est l'entier relatif $\boldsymbol{(b+a')-(b'+a)}$

En résumé on a accompli le programme fixé :

Z contient IN et est muni d’une addition et d’une multiplication qui prolongent celles des entiers naturels.
Et chaque équation $a+x=b$ avec a et b des entiers relatifs admet une unique solution

Développement en base N : ajout du symbole ''-''

La création des entiers relatifs ne pose pas de problème de notation aussi compliqué que celle des nombres rationnels, l'adjonction d'un nouveau symbole au système de numération, le signe "moins" – est suffisant pour pouvoir les écrire.

Si a-b n'est pas un entier naturel (c'est donc un nombre "négatif") on utilise le développement de son opposé précédé du signe "moins", par exemple **12- 15** sera noté **-3**.

Le même processus de construction peut être appliqué à **Q+** **:**

On obtient alors l’ensemble des rationnels **Q**.

Résumé et notation

L'ensemble des entiers relatifs (ou entiers signés) est noté **Z** .

On a **Z = {…., -2,-1, 0, 1,2,….}**

On construit de la même manière l'ensemble des nombres rationnels **Q**, à partir de l'ensemble des rationnels positifs.

Les nombres réels

Nous avons laissé de coté les "nombres" représentés par des développement illimités non périodiques, qui ne représentent des nombres ni entiers, ni rationnels.

<u>Définition </u>: Un développement illimité propre (c'est-à-dire ne finissant pas par une suite infinie de "9") représente un nombre "réel".

Parmi les nombres réels on trouve donc non seulement les nombres rationnels qu'on identifie aux développements illimités propres finissant par une suite infinie de "0" (qu'on qualifie de développements finis) ou aux développements illimités ultimement périodiques mais aussi les développements non périodique.

La "construction" de l'ensemble des nombres réels tels que nous l'avons donné n'est pas vraiment très pratique.

En effet, ne serait-ce que définir l'addition de deux réels (c'est-à-dire l'addition de deux développements illimités) est relativement long. Il faut attendre le XIX siècle pour que soit donnée une définition et une construction axiomatique de l'ensemble des réels à partir de l'ensemble des rationnels (H. Dedekind).

Les développements en fractions continues fini (DFCfini)

Soit a, c_1,c_2, … ,c_k une suite finie d'entiers (attention il ne s'agit plus de chiffre mais bien de nombre)

$$X = a + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots \, c_{k-1} + \cfrac{1}{c_k}}}}$$

est le développement fini en "fraction continues" d'un nombre X

On notera X=[a; c_1,c_2,c_3,…c_k]

Il est immédiat que les nombres admettant un DFC fini sont tous des nombres rationnels.

Une question assez naturelle est : Tous les nombres rationnels admettent-ils un DFC fini ?

Observons les deux exemples :

$$\mathbf{327/\,25 = 13 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2}}}, \qquad \mathbf{329/12 = 27 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

On remarque que ces deux nombres sont tous deux rationnels, l'un est décimal (327/25) et l’autre non (329/12).

Ils admettent tous les deux des DFC finis. Ce phénomène est général

Tous les nombres rationnels admettent un DFC fini.

En effet, soit $\boldsymbol{Q}$ le quotient des entiers $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}$ non nul) .

Si on effectue la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$, il vient une relation de la forme : $\boldsymbol{a = b\, q_1 + r_1}$
où $\boldsymbol{q_1}$ est le quotient de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{r_1}$ est le reste ($\boldsymbol{r_1}$ est un nombre parmi $\boldsymbol{0,1,2,\ldots.}$ et $\boldsymbol{b-1}$)

Donc le rationnel $\boldsymbol{Q = a/b}$ vaut $\boldsymbol{Q= q_1+ r_1/b.}$
- Si $\boldsymbol{r_1 = 0}$ on a $\boldsymbol{Q=q_1}$ et le DFC s’"arrête"
- Sinon, comme $\boldsymbol{1< r_1 < b}$ la fraction $\boldsymbol{r_1 / b}$ est plus petite que $\boldsymbol{1}$.
Si on effectue la division euclidienne de $\boldsymbol{b}$ par $\boldsymbol{r_1}$
il vient $\boldsymbol{b = r_1\, q_2+ r_2}$, donc $\boldsymbol{(b/ r_1)= q_2+(r_2 / r_1)}$
($\boldsymbol{r_2}$ est parmi $\boldsymbol{0,1,2,\ldots. ,r_1-1}$).

Si on réinjecte cela dans l'expression de Q, il vient

$$Q = q_1 + r_1/b = q_1 + \frac{1}{(b/r_1)} = q_1 + \frac{1}{q_2 + (r_2/r_1)}$$

On reitère le processus. Comme les restes successifs sont positifs ou nuls et diminuent strictement, après un certain nombre d'itérations le processus s'arrête et Q admet donc un DFC fini.

En résumé :

Les entiers naturels (et les entiers relatifs si on adjoint le symbole -) peuvent être écrits grâce à un développement en base n.

Les rationnels peuvent être écrits grâce à un développement illimité propre, mais ce developpement est dans certain cas infini, il est malgré tout toujours ultimement périodique.

Les rationnels peuvent être écrits grâce à développement en fraction continue fini.

Développements en fraction continue (DFC)

Comme nous l'avons fait pour les développements décimaux nous allons maintenant géneraliser les DFC au cas infini.

Le développement en "fraction continue" (DFC) d'un nombre x consiste à l'écrire sous la forme :

$$x = a + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{}{\ddots}}}}$$

Nous noterons dans la suite $x = [a; c_1, c_2, c_3, \ldots]$ où $a, c_1, c_2, \ldots$ sont des entiers.

Nous savons déjà qu'un nombre ayant un DFC infini ne peut pas être rationnel.

Nous admettrons que tous les nombres réels admettent un DFC. La question naturelle qui se pose est d'identifier les réels admettant un DFC périodique. On se contentera de quelques observations, les démonstrations sont difficiles et nécéssitent des connaissances qui dépasse le niveau de ce cours.

Observons ce qui arrive à $\sqrt{2}$ par exemple :

On a

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1; 2,2,2,...]$$

En effet, posons $y = (1 / (2+(1/(2+\ldots\ldots)))) = [0; 2,2,2,...]$

On a $y=1/ (2+y)$.

Donc $y(2+y)=1$, c'est-à-dire $y^2+2y-1=0$.

Si on pose $x= 1+y$ alors $y=x-1$.

Donc on a $(x-1)^2+2(x-1)-1=0$ c'est-à-dire $x^2-2=0$. Donc $x=\pm\sqrt{2}$.

comme $x>0$ on a finalement $x=\sqrt{2}$

Le DFC de √ 2 est donc infini périodique

Il a été démontré que, en revanche π n'admet pas un DFC périodique.

Un autre résultat est que les réels admettant un DFC fini ou périodique sont des nombres "algébriques".

Les nombres qui admettent un DFC infini non périodique sont dits transcendants, les exemples de nombres transcendants que vous connaissez sont $\boldsymbol{e}$ et π. En fait les nombres transcendants sont très nombreux.

Les nombres algébriques

Définition : Un nombre **A** est un nombre algébrique s'il apparait directement ou indirectement dans un problème « algébrique », c'est-à-dire dans un problème ne faisant intervenir que des nombres entiers , l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division.

Autrement dit tous les nombres qui sont résultat d'opérations entre entier est algébrique.

Par exemple les rationnels sont algébriques : ce sont les nombres qui apparaissent « directement ».

Les nombres qui apparaissent indirectement sont ceux qui, par exemple, sont solution d'équation comme :
$\mathbf{3X^2 + (1/X) = 0}$ ou $\mathbf{X^2 = 2}$

Si **A** est solution de $\mathbf{3X^2 + (1/X) = 0}$ ou de $\mathbf{X^2 = 2}$ alors **A** est algébrique.

un exemple : Φ **le nombre d'or**

L’histoire du nombre d’or est très ancienne. Il est accordé au nombre d’or une valeur esthétique qui a traversé les siècles et les cultures.La notation usuelle de ce nombre, ϕ, est une référence au sculpteur Phidias qui décora le Parthénon, on retrouve ce nombre dans les proportions des pyramides égyptiennes, le célèbre "homme de Vitruve'‘, de Léonard Da Vinci, contient aussi des proportions liées à ϕ (le rapport entre la taille et la distance sol-nombril, par exemple vaut ϕ.

Si on ignore son aspect culturel le nombre ϕ est de peu d'intérêt mathématique, sa définition telle qu'on la trouve dans les éléments d'Euclide (encore) est la suivante

Un segment est partagé suivant la section "d'or" ou "dans la proportion divine" si les rapports du petit morceaux sur le grand et du grand morceaux sur le tout sont égaux.

Notons x la longueur du segment et y la longueur du "grand" morceaux. Le "petit" morceaux a pour longueur x-y, la section est dorée lorsque $(x-y)/y= y/x$, autrement dit lorsque $(x/y)-1= y/x$. Si on note ϕ le rapport x/y on a donc $\phi-1= 1/\phi$
Ce qui signifie que ϕ satisfait l'équation

$$\phi^2-\phi-1=0.$$

Le nombre d'or est donc solution d'un problème algébrique, c'est un nombre algébrique.

EN RESUME

Concernant le <u>développement illimité décimal</u> :

- Les nombres <u>rationnels</u> ont un développement décimal <u>fini ou périodique</u>.

Les rationnels admettant un développement décimal fini sont dit '<u>décimaux</u>'.

Le fait d'être décimal est au fond assez épiphénoménal il s'agit en effet d'une propriété liée à la manière dont on écrit les nombres et non d’une propriété fondamentale du nombre lui-même : si on change de base les nombres particularisés changent.

- Les nombres <u>irrationnels</u> sont les nombres qui admettent un développement décimal infini non périodique.

Etre rationnel ou irrationnel est une "vraie" propriété.

EN RESUME

Concernant le développement en fraction continue :

Les nombres rationnels admettent un DFC fini.

Les nombres irrationnels admettent un DFC infini.

Parmi les irrationnels :

- Ceux qui sont algèbriques admettent un DFC périodique.
- Ceux qui sont transcendants admettent un DFC infini non périodique.

Notes historiques

Bien que la nature des problèmes faisant apparaître des entiers négatifs soit simples et que les difficultés conceptuelles soient apparemment moindre que dans le cas des nombres rationnels, aucune des civilisations antiques n'utilisèrent la notion de nombres négatifs.

Les premiers documents où on peut reconnaître cette notion date du VI$^{\text{ième}}$ siècle, ce sont des documents indiens, les nombres représentent dans ces documents soit des recettes (nombres positifs) soit des dettes (nombres négatifs).

Cette notion diffuse ensuite très lentement vers l'occident sans être vraiment d'usage courant jusqu'au XVIII ième siècle. La règle des signe par exemple n'apparait qu'au XVI ième siècle (Simon Stevin).

Rationnel/Irrationnel

Les notions de rationalité et d'irrationalité apparaissent en Grèce au alentour du VI^{ième} siècle AJ avec l'école pythagoricienne. Ces notions apparaissent sous forme de la commensurabilité ou incommensurabilité, deux grandeurs sont commensurables si on peut trouver une unité qui permet de donner une valeur entière à chacune d'elles. Le problème d'Euclide n'est pas étranger à ce problème. La commensurabilité en terme moderne revient à montrer qu'un nombre est le rapport de deux entiers autrement dit qu'un nombre est rationnel. La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ remonte au V^{ième} siècle AJ, elle s'appuie sur le principe de « descente infinie » qui est une forme de ce que l'on appele aujourd'hui un raisonement par l'absurde.

Les mathématiciens de l'antiquité grecque ne connaissaient pas le système numérique positionnel, aussi la "notion" de nombre réel que nous avons atteint grâce à des généralisations successives de la notion de développement positionnel : développement fini, développement illimité ne leur étaient pas accessible. Les "notions de nombres" accessibles étaient celle d'entiers, et de rationnels c'est-à-dire les nombres que l'on construit à partir des entiers et des opérations "arithmétiques". L'école pythagoricienne en particulier considérait que le monde devait pouvoir se décrire en terme d'entier et d'opérations arithmétiques. Le paradigme des nombres ne pouvant être obtenus comme résultat du quotient de deux entiers, comme $\sqrt{2}$, leur était connu. Une tentative de résolution a été d'obtenir ces nombres comme résultat de "plusieurs" divisions successives "emboitées". C’est la source historique des développement en fractions continues

Nombres premiers

L’existence des nombres premiers ainsi que le fait qu'un nombre entier est toujours le produit d'une famille de nombres premiers était connu des grecs bien avant l'époque d'Euclide. Eratosthène, né à Cyrène en -276, mort à Alexandrie -194 donne d'ailleurs une méthode de détermination des entiers premiers par élimination : Le « crible d'Eratosthène »

L'idée directrice du crible est une lapalissade : si p est un nombre premier aucun de ses multiples ne l'est

Dans la liste des entiers naturels à partir de 2 le premier est 2 on raye les entiers de 2 en deux :

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Dans la liste des entiers naturels à partir de 2 le premier est **2** on raye les entiers de 2 en deux :

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

2 3 4 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~ 35 ~~36~~

Dans la liste des entiers naturels à partir de 2 le premier est **2** on raye les entiers de 2 en deux :

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

2 3 4 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~ 35 ~~36~~

Le premier nombre non rayé **3** est premier et on raye ensuite les entiers suivants de 3 en 3 :

2 3 4 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~ 35 ~~36~~

2 3 4 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ 35 ~~36~~

Le premier nombre non rayé est **5** il est premier, on raye les nombres suivant de 5 en 5:

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ 35 ~~36~~

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~

Le premier nombre non rayé est **7** il est premier, on raye ensuite les nombres suivants de 7 en 7

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~

(sur ce début de liste aucun nouveau nombre n'est rayé)

On continue ainsi de suite…

FIN