REPRESENTATIONS DE GELFAND-GRAEV POUR LES GROUPES REDUCTIFS NON CONNEXES

KARINE SORLIN

Résumé. Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Soit σ un automorphisme rationnel quasi-central de G. Nous construisons ci-dessous l'équivalent des représentations de Gelfand-Graev du groupe $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$, lorsque σ est unipotent et lorsqu'il est semi-simple. Nous montrons de plus que ces représentations vérifient des propriétés semblables à celles vérifiées par les représentations de Gelfand-Graev dans le cas connexe.

Gelfand-Graev representations for non connected reductive groups

Abstract. Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$ and let F be the corresponding Frobenius endomorphism. Let σ be a quasi-central rational automorphism of G. We define in this article Gelfand-Graev representations of the group $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ when σ is unipotent and when it is semi-simple. We show that they have similar properties to Gelfand-Graev representations of the group G^F.

Abridged english version

Non-connected reductive groups of the kind $G.\langle\sigma\rangle$, where G is a connected reductive group and σ an automorphism of G, have been studied by R. Steinberg [8], F. Digne et J. Michel [3] and G. Malle [5].

We suppose that G is a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$, that F is the corresponding Frobenius endomorphisms and that σ is a rational quasi-central automorphism of G, which means that σ is quasi-semi-simple (i.e. σ stabilises $(T \subset B)$ where T is a maximal torus included in a Borel subgroup B of G) and $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ for any quasi-semi-simple automorphism $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, where $\mathrm{ad}(g)$ is the conjugation by g for all $g \in G$.

The notion of a quasi-central element was introduced by F. Digne and J. Michel in [3]. They have shown that for any rational automorphism σ' of G there is g in G so that $\sigma' \circ \mathrm{ad}(g)$ is rational quasi-central ([3] proposition 1.34). When σ' is a quasi-semi-simple automorphism of G then $G^{\sigma'}$ is a reductive group ([4] theorem 1.8) and when σ' is quasi-central, there are lots of similarities between $G.\sigma'$ and $(G^{\sigma'})^0$, for example between root systems and Weyl groups ([4] theorem 1.15), Deligne-Lusztig characters ([3] 4) and Gelfand-Graev representations (5).

The purpose of this note is to define Gelfand-Graev representations for $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ which extend the σ-stable Gelfand-Graev representations for connected reductive groups.

Let T be a σ-stable rational maximal torus of G included in a σ-stable rational Borel subgroup of G. Let U be the unipotent radical of B.

In the connected reductive case, Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing an irreducible linear character of U^F which is called a regular character. We define a regular character of $U^F.\langle\sigma\rangle$ as the extension of a σ-stable regular character of U^F. For any σ-stable regular character χ of U^F, we note $\tilde{\chi}$ the extension of χ so that $\tilde{\chi}(\sigma) = 1$. We show that $((T^\sigma)^0)^F$-orbits of σ-stable regular characters of U^F are parametrized by the set $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ of F-conjugacy classes of the center $\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$ of $(G^\sigma)^0$ (proposition 2.2). We fix a σ-stable regular character of U^F which we call χ_1. According to the lemma 1.3 of [2], we have $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0)) \simeq \mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)((T^\sigma)^0)^F)$, where $\mathcal{L}_{(T^\sigma)^0}$ is the Lang map from $(T^\sigma)^0$ to $(T^\sigma)^0$. Then $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ parametrizes the $((T^\sigma)^0)^F$-orbit of ${}^t\chi_1$ where $t \in (T^\sigma)^0$ is such that $t^{-1}F(t) \in z$.

When σ is unipotent, G^σ and T^σ are connected ([4] proposition 1.33) and σ-stable Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing σ-stable regular characters of U^F (proposition 3.1). In this case, we define Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ as the representations obtained by inducing regular characters of $U^F.\langle\sigma\rangle$ (definition 3.2). So, in this case, Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ are parametrized by $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

When σ is semi-simple, G^σ and T^σ are not always connected and proposition 3.1 is false. The definition of Gelfand-Graev representations is then more complicated (definition 3.3). As T is connected, the Lang map $\mathcal{L}_T$ from T to T is surjective. So, as we have $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset T$, for all z in $H^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, there is $t \in T$ so that $t^{-1}F(t) \in z$. Then, ${}^t\sigma$ is a rational quasi-central automorphism of G, we have $\tilde{G}^F = G^F.\langle{}^t\sigma\rangle$, the regular character ${}^t\chi_1$ is ${}^t\sigma$-stable and the Gelfand-Graev representation Γ of G^F obtained by inducing ${}^t\chi_1$ is σ-stable. Moreover, the Gelfand-Graev representation of $\tilde{G}^F$ obtained by inducing $\tilde{{}^t\chi_1}$ from $U^F.\langle{}^t\sigma\rangle$ to $\tilde{G}^F$ is independent of the choice of t and extends Γ. By this way, we cannot extend all σ-stable Gelfand-Graev representations of G^F. Anyway, like in the unipotent case, Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ are parametrized by $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ have similar properties to Gelfand-Graev representations of G^F. They are multiplicity free (proposition 4.1) and their Harish-Chandra restrictions to a rational σ-stable Levi subgroup included in a rational σ-stable parabolic subgroup still are Gelfand-Graev representations (proposition 4.2). We say that an element of $G.\sigma$ is regular if the dimension of its centralizer in G is minimal among all elements of $G.\sigma$. The dual of any Gelfand-Graev representation of $G^F.\sigma$ is zero outside regular unipotent elements of $G^F.\sigma$ when σ is unipotent (resp. outside regular pseudo-unipotent elements of $G^F.\sigma$, i.e. conjugate under G of elements of $U.\sigma$, when σ is semi-simple) (proposition 4.5).

Then Gelfand-Graev representations can be used to calculate the average value of irreductible characters of $G^F.\langle\sigma\rangle$ on a set of G^F-classes of regular unipotent (resp. pseudo-unipotent) elements of $G^F.\sigma$ if σ is unipotent (resp. semi-simple) (theorem 5.2). When σ is semi-simple, the characteristic can be chosen good for $(G^\sigma)^0$ and we can get the exact values of irreductible characters of $G^F.\langle\sigma\rangle$ on G^F-classes of regular pseudo-unipotent elements of $G^F.\sigma$. Moreover we can link these formulas with the formulas calculated in [2] for $(G^\sigma)^0$.

1. Résultats sur les automorphismes quasi-semi-simples d'un groupe réductif connexe

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, on note F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On dit d'un automorphisme σ de G qu'il est quasi-semi-simple s'il fixe un couple (T, B) formé par un tore maximal T de G inclus dans un sous-groupe de Borel B de G. Le théorème suivant explicite alors les relations qui existent entre G et le groupe G^σ des points de G fixes par σ.

Théorème 1.1 *([4] théorème 1.8)*

(i) G^σ est un groupe réductif.

(ii) Soit T un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G. Soit Φ l'ensemble des racines relativement à (G, T). Si $\alpha \in \Phi$, si $\lambda \mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est l'ordre de la σ-orbite de α, on définit $C_{\sigma,\alpha} \in \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ par

$\sigma^i(x_\alpha(\lambda)) = x_\alpha(C_{\sigma,\alpha}\lambda)$. Alors, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous σ vérifiant la condition

$$(*) \quad C_{\sigma,\alpha} = \pm 1,$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de l'orbite dont la somme est une racine, sur l'ensemble des racines de $(G^\sigma)^0$ relativement à $(T^\sigma)^0$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ, où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ soit une racine, les orbites de α et de $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ ont même image et $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma,\alpha+\sigma^k(\alpha)}$.

On dit que σ est quasi-central s'il est semi-simple et si on a $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple σ' tel que $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où on note $\mathrm{ad}(g)$ la conjugaison par g pour tout $g \in G$.

Théorème 1.2 *([4] théorèmes 1.15, 1.33 et 1.36)*

(i) Si σ est quasi-semi-simple, alors σ est quasi-central si et seulement si, pour tout couple (T, B), où T est un tore σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G, toute racine simple relativement à (T, B) vérifie la condition (*) du théorème 1.1.

(ii) Si σ est quasi-central unipotent, alors G^σ et T^σ sont connexes.

(iii) Si σ est quasi-central et rationnel, alors, il existe un couple (T, B) formé par un tore maximal rationnel σ-stable T inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable B de G.

2. Caractères réguliers

On suppose que σ est un automorphisme rationnel quasi-central de G. Soit (T, B) un couple formé par un tore maximal rationnel σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. On note U le radical unipotent de B et U^* le groupe dérivé de U.

Dans le cas des groupes réductifs connexes, les représentations de Gelfand-Graev sont obtenues en induisant certains caractères linéaires irréductibles de U^F appelés caractères réguliers. Nous généralisons la notion de caractères régulier dans la définition suivante.

Définition 2.1 *Un caractère multiplicatif $\tilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(U^F.\langle\sigma\rangle)$ est appel caractre régulier si pour tout $u \in U^F$:*

$$\tilde{\chi}(u.\sigma) = \chi(u)\tilde{\chi}(\sigma),$$

où χ est un caractère σ-stable de $\mathrm{Irr}(U^F)$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

(i) La restriction de χ à $(U^*)^F$ est triviale.

(ii) Pour toute τ-orbite $\mathcal{O}$ de Π, $\chi|_{U^F_\mathcal{O}}$ n'est pas triviale, où $U_\mathcal{O}$ est l'image de $\prod_{\alpha\in\mathcal{O}} U_\alpha$ dans U/U^*.

On dit que χ est régulier.

Pour tout caractère régulier σ-stable χ de U^F, on note $\tilde{\chi}$ l'extension de χ à $U^F.\langle\sigma\rangle$ telle que $\tilde{\chi}(\sigma) = 1$.

Proposition 2.2 *On suppose que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$, où $C_{\sigma,\alpha}$ est le coefficient défini dans le théorème 1.1. Alors, les caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramtrs par $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, où $\mathcal{L}_{(T^\sigma)^0}$ est l'application de Lang de $(T^\sigma)^0$ dans $(T^\sigma)^0$ définie par $t \mapsto t^{-1}F(t)$.*

Remarque 2.3 *Lorsque σ est unipotent quasi-central, les hypothèses de la proposition 2.2 sont toujours vérifiées.*

Paramétrage des caractères σ-stables de U^F

On fixe un caractre régulier σ-stable χ_1 de U^F afin de bien dfinir ce paramétrage.

D'après le lemme 1.3 de [2], $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)((T^\sigma)^0)^F)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, donc les $((T^\sigma)^0)^F$-orbites des caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$. Comme $(T^\sigma)^0$ est connexe, l'application de Lang de $(T^\sigma)^0 \to (T^\sigma)^0$ est surjective. De plus, on a $Z((G^\sigma)^0) \subset (T^\sigma)^0$. Donc, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, il existe $t \in (T^\sigma)^0$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et z paramètre la $((T^\sigma)^0)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$.

3. Définition des représentations de Gelfand-Graev

3.1 Cas où σ est unipotent

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent. On rappelle que, lorsque σ est quasi-central unipotent, on a $(G^\sigma)^0 = G^\sigma$ et $(T^\sigma)^0 = T^\sigma$. Nous allons étendre toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F en une représentation de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$. Selon la proposition suivante, il suffit d'induire de $U^F.\langle\sigma\rangle$ à $\tilde{G}^F$ les caractères réguliers σ-stables de U^F.

Proposition 3.1 *Si σ est un automorphisme quasi-central unipotent de G, alors, tout caractre σ-stable de Gelfand-Graev de G^F est l'induit d'un caractre rgulier σ-stable de U^F.*

Définition 3.2 *Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, l'induit $\mathrm{Ind}_{U^F.\langle\sigma\rangle}^{G^F.\langle\sigma\rangle}(\tilde{{}^t\chi_1})$ ne dpend pas du choix de $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on dfinit la reprsentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\tilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F.\langle\sigma\rangle}^{G^F.\langle\sigma\rangle}(\tilde{{}^t\chi_1})$. On dfinit la reprsentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G.\sigma}$ de $G^F.\sigma$ par $\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F.\sigma}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}})$.*

3.2 Cas où σ est semi-simple

On suppose que σ est rationnel quasi-central semi-simple. On fait sur σ l'hypothèse supplémentaire suivante: on suppose que pour toute racine simple α, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$. Les hypothèses de la proposition 2.2 sont alors vérifiées.

On voudrait que toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F soit étendue en au moins une représentation de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$. Selon la proposition 3.1, sous l'hypothèse σ unipotent quasi-central, toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F est l'induite d'un caractère régulier σ-stable de U^F. La proposition 3.1 n'est plus vraie lorsque l'on supprime l'hypothèse σ unipotent. On ne peut plus se contenter comme lorsque σ est unipotent quasi-central de définir les réprésentations de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$ comme les induites de $U^F.\langle\sigma\rangle$ à $\tilde{G}^F$ des extensions à $U^F.\langle\sigma\rangle$ des caractères réguliers σ-stables de U^F.

Par ailleurs, lorsque σ est semi-simple, G^σ et T^σ ne sont pas toujours connexes, donc, pour $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il n'existe plus forcément $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Cependant, T est connexe, donc l'application de Lang $\mathcal{L}_T : T \to T$ est surjective et comme $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset T$, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il existe $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Alors, ${}^t\sigma$ est un automorphisme rationnel quasi-central de G, on a $\tilde{G}^F = G^F.\langle{}^t\sigma\rangle$ et le caractère régulier ${}^t\chi_1$ est ${}^t\sigma$-stable. De plus, $\Gamma = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}{}^t\chi_1$ est une représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F.

Définition 3.3 *Soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Alors,* $\mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1})$ *ne dépend pas du choix de $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on dfinit la reprsentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\tilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F.\langle{}^t\sigma\rangle}^{\tilde{G}^F}(\tilde{{}^t\chi_1})$.*

On dfinit la reprsentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G.\sigma}$ de $G^F.\sigma$ par $\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F.\sigma}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}})$.

4. Propriétés des représentations de Gelfand-Graev

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple.

Proposition 4.1 *Les composantes irréductibles des représentations de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ sont toutes de multiplicité 1.*

Soit L un sous-groupe de Levi rationnel et σ-stable contenant T d'un sous-groupe parabolique rationnel σ-stable P de G contenant B. L'inclusion $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset \mathrm{Z}(L^\sigma)$ induit une application surjective $h_{L^\sigma} : \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)) \to \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(L^\sigma))$. On définit les représentations de Gelfand-Graev de $L^F.\sigma$ comme celles de $G^F.\sigma$ dans le paragraphe 3.

Proposition 4.2 *Avec les notations ci-dessus, on a: ${}^*\mathrm{R}_{L.\sigma}^{G.\sigma}(\Gamma_z^{G.\sigma}) = \Gamma_{h_{L^\sigma}(z)}^{L.\sigma}$, où ${}^*\mathrm{R}_{L.\sigma}^{G.\sigma}$ désigne la restriction de Harish-Chandra généralisée aux groupes non connexes comme dans [4].*

Relation avec les éléments réguliers

Définition 4.3 *Soit y un élément d'un groupe réductif non connexe H. Alors, y est dit régulier dans H si et seulement si la dimension de son centralisateur dans H^0 est minimale dans $H^0.y$.*

Définition 4.4 *Lorsque σ est semi-simple, on appelle élément pseudo-unipotent de $G.\sigma$ tout conjugué sous G d'un élément de $U.\sigma$.*

Proposition 4.5

(i) Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F.\sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents réguliers lorsque σ est unipotent.

(ii) Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F.\sigma$ est nul en dehors des éléments réguliers pseudo-unipotents rationnels lorsque σ est semi-simple.

(iii) Dans les deux cas, on a $\langle \Gamma_z^{G.\sigma}, (-1)^{|\Pi/\tau\times\sigma|}\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}\rangle_{G^F.\sigma} = |\mathrm{Z}((G^\sigma)^F)|\delta_{z,z'}$, où $\mathrm{D}_{G.\sigma}$ désigne la dualité de Curtis généralisée aux groupes non connexes comme dans [4].

5. Valeurs des fonctions de σ-classes sur les lments rguliers unipotents ou pseudo-unipotents

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple. On choisit $u_0 \in U^F$ tel que $u_0.\sigma$ soit régulier. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des z de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$ tels qu'il existe $t \in T^\sigma$ pour lequel $t^{-1}F(t) \in z$. Si σ est unipotent, on a $\mathcal{Z} = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, soit $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. On définit l'ensemble $\mathcal{U}_z = \{x.\sigma \in G^F.\sigma | x.\sigma \simeq_{G^F} {}^t(u_0U^*.\sigma)\}$, définition qui est indépendante du choix de t. Les ensembles $\mathcal{U}_z$ sont disjoints et la réunion des $\mathcal{U}_z$ est l'ensemble des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $G^F.\sigma$ lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple). Si σ est semi-simple et si la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, alors chaque $\mathcal{U}_z$ est une classe de conjugaison sous G^F.

Définition 5.1 *Pour tout $z \in \mathcal{Z}$, on note Φ_z la $(T^\sigma)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$, où $t \in T^\sigma$ est tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on pose*

$$\sigma_z = \sum_{\chi \in \Phi_z} \tilde{\chi}(u_0.\sigma).$$

La définition ci-dessus généralise celle des coefficients σ_z qui ont été définis dans [2] (définition 3.4) et dans [3] (définition 14.34) dans le cadre des groupes réductifs connexes. Les coefficients σ_z de $G.\sigma$ peuvent s'exprimer en fonction des coefficients σ_z analogues pour le groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$.

Théorème 5.2

(i) Soit $\tilde{\chi}$ un caractre de $\tilde{G}^F$ dont la restriction G^F est irrductible, et soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, alors, avec les notations ci-dessus,

$$|\mathcal{U}_z|^{-1} \sum_{u.\sigma \in \mathcal{U}_z} \chi(u.\sigma) = (-1)^{|(\Pi/\sigma)/\tau|} \sum_{\{z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)) | z^{-1}z' \in \mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'} \langle \mathrm{D}_{G.\sigma}(\chi), \Gamma_{z'}^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma}.$$

(ii) On a $\langle \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma} = |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))||\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)^F|q^l$, o l est le rang semi-simple de $(G^\sigma)^0$, et z parcourt $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

References

[1] R.W. Carter, Finite groups of Lie type (Wiley-Interscience, 1985)

[2] F. Digne, G.I. Lehrer, J. Michel, The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre (J. reine angew. Math., no 425, 1992, p. 155-192)

[3] F. Digne, J. Michel, Representations of Finite Groups of Lie Type (London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press)

[4] F. Digne, J. Michel, Groupes rductifs non connexes (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Suprieure, 4e srie, t. 27, 1994, p. 345-406)

[5] G. Malle, Generalized Deligne-Lusztig characters (Journal of Algebra, vol. 159, no 1, 1993, p. 64-97)

[6] K. Sorlin, Représentations de Gelfand-Graev et correspondance de Springer dans les groupes réductifs non connexes (mémoire de thèse, Université de Picardie, 2001)

[7] N. Spaltenstein, Classes unipotentes et sous-groupes de Borel (Lectures Notes in Mathematics, no 946, Springer, 1982)

[8] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups (Memoirs of AMS, no 80, 1968)

LAMFA, Université de Picardie, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France.
Courrier électronique : karine.sorlin@wanadoo.fr