

## L2 Maths S3 Théorie des Graphes

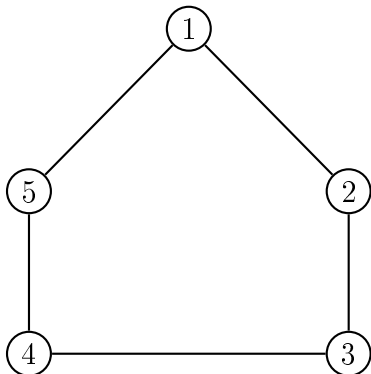
Examen du mercredi 4 novembre 2009.

*Les seuls documents autorisés sont les résumés de cours distribués en cours. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.*

**Exercice 1** Soient  $G$  et  $H$  deux graphes isomorphes. Montrer que si  $G$  est connexe, alors  $H$  est lui aussi connexe.

Cf corrigé du DM1.

**Exercice 2** 1. Dessiner un graphe simple qui a pour suite de degrés  $(2, 2, 2, 2, 2)$ . On appellera  $H$  ce graphe.



2. Construire un graphe simple  $G$  qui a pour suite de degrés  $(6, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 2)$  en ajoutant successivement 3 sommets au graphe  $H$ . Dessiner les graphes intermédiaires obtenus à chaque ajout de sommet en précisant la suite de degrés de chaque graphe.

On va passer de la suite  $(6, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 2)$  à la suite  $(2, 2, 2, 2, 2)$  en appliquant 3 fois la relation :

$$(s, t_1, \dots, t_s, d_1, \dots, d_r) \mapsto (t_1 - 1, \dots, t_s - 1, d_1, \dots, d_r)$$

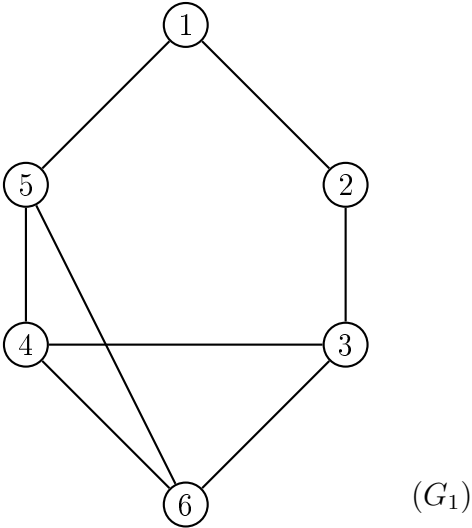
On obtient les suites suivantes :

$(4, 4, 4, 4, 4, 2, 2)$ ,

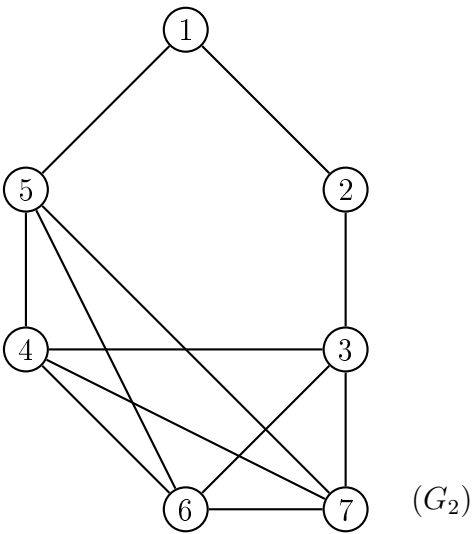
$(3, 3, 3, 3, 2, 2)$ ,

$(2, 2, 2, 2, 2)$ .

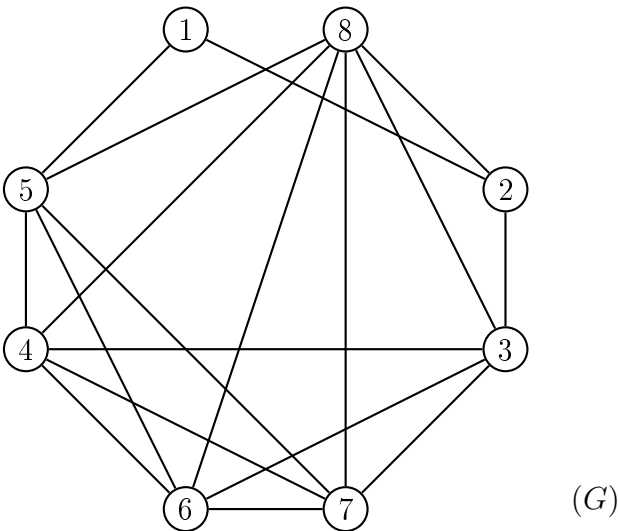
On ajoute un sommet à  $H$  et on le relie à 3 autres sommets, on obtient le graphe  $G_1$  qui a pour suite de degrés la suite  $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$  :



On ajoute un sommet à  $G_1$  et on le relie à 4 sommets de degré 3, on obtient le graphe  $G_2$  qui a pour suite de degrés la suite  $(4, 4, 4, 4, 4, 2, 2)$  :



On ajoute un sommet à  $G_2$  et on le relie à 5 sommets de degré 4 et à un sommet de degré 2, on obtient le graphe  $G$  qui a pour suite de degrés la suite  $(6, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 2)$  :



**Exercice 3** Soit le graphe  $G = (V, A)$ , défini par le dictionnaire des voisins ci-dessous :

$x \in V$	Voisins de $x$
$a$	$\{b, f, i\}$
$b$	$\{a, c, i, j\}$
$c$	$\{b, i\}$
$d$	$\{e\}$
$e$	$\{d, g, k, l\}$
$f$	$\{a, j\}$
$g$	$\{e, k, l\}$
$h$	$\{i, j\}$
$i$	$\{a, b, c, h\}$
$j$	$\{b, f, h\}$
$k$	$\{e, g, l\}$
$l$	$\{e, g, k\}$

Donner les composantes connexes de  $G$  sans dessiner le graphe (on pourra utiliser l'algorithme de connexité vu en cours). Ce graphe est-il connexe ?

On commence par calculer la composante connexe du sommet  $a$ .

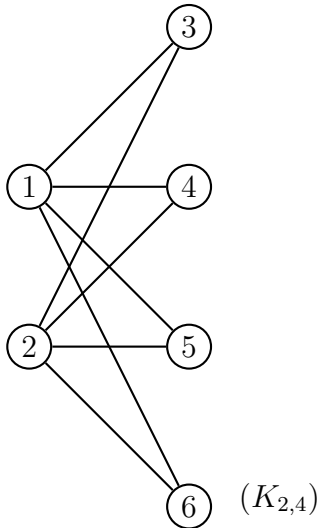
Composante	New	Voisins
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{b, f, i\}$
$\{a, b, f, i\}$	$\{b, f, i\}$	$\{a, b, c, h, i, j\}$
$\{a, b, c, f, i, j, h\}$	$\{c, j, h\}$	$\{b, f, h, i, j\}$
$\{a, b, c, f, i, j, h\}$	$\emptyset$	

La composante connexe de  $a$  est donc  $\{a, b, c, f, i, j, h\}$ , elle ne contient pas tous les sommets de  $G$  (en particulier  $d$  n'y est pas), donc  $G$  n'est pas connexe. Calculons maintenant la composante de  $d$ .

Composante	New	Voisins
$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$
$\{d, e\}$	$\{e\}$	$\{d, g, k, l\}$
$\{d, e, g, k, l\}$	$\{g, k, l\}$	$\{e, g, k, l\}$
$\{d, e, g, k, l\}$	$\emptyset$	

La composante connexe de  $d$  est  $\{d, e, g, k, l\}$ . L'ensemble des sommets de  $G$  est la réunion de la composante connexe de  $a$  et de celle de  $d$ .

**Exercice 4** 1. Le graphe biparti complet  $K_{2,4}$  est-t-il eulérien ? Si c'est le cas, donner un cycle eulérien de  $K_{2,4}$ .



$K_{2,4}$  est un graphe connexe et tous ses sommets sont de degré pair donc d'après le théorème du cours,  $K_{2,4}$  est eulérien.

Pour trouver un cycle eulérien, on part d'un cycle élémentaire :  $C = (1, 3, 2, 6, 1)$  et on insère dans  $C$  le cycle élémentaire  $C' = (1, 4, 2, 5, 1)$  qui n'a aucune arête en commun avec  $C$ . On obtient le cycle eulérien  $(1, 3, 2, 6, 1, 4, 2, 5, 1)$ .

2. Donner les valeurs de  $n$  et de  $m$  pour lesquelles le graphe biparti complet  $K_{n,m}$  est eulérien.

$K_{n,m}$  est toujours un graphe connexe. L'ensemble des sommets de  $K_{n,m}$  est la réunion disjointe de deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $Card(A) = n$ ,  $Card(B) = m$ , tout sommet de  $A$  est relié à tout sommet de  $B$  et ce sont les seules arêtes de  $K_{n,m}$ . Donc, les sommets de  $A$  sont de degré  $m$  et les sommets de  $B$  sont de degré  $n$ . Pour que  $K_{n,m}$  soit eulérien, il faut et il suffit que  $m$  et  $n$  soient des nombres pairs.

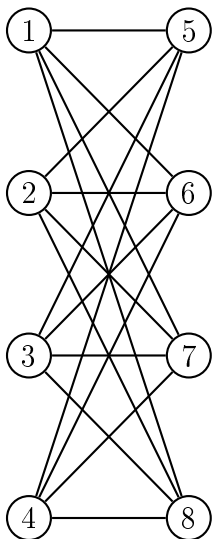
3. Donner les valeurs de  $n$  et de  $m$  pour lesquelles le graphe biparti complet  $K_{n,m}$  est hamiltonien.

On reprend les notations de la question précédente. Un cycle élémentaire de  $K_{n,m}$  contient autant de sommets de  $A$  et de sommets de  $B$ . Donc, si  $K_{m,n}$  contient un cycle hamiltonien, on doit avoir  $n = m$ .

Supposons que  $n > 1$  et que  $m = n$  ( $K_{1,1}$  ne possède pas de cycle, il ne peut être hamiltonien). On numérote de 1 à  $n$  les sommets de  $A$  et de  $n + 1$  à  $2n$  les sommets de  $B$ . Alors, le cycle  $(1, n + 1, 2, n + 2, \dots, n, 2n, 1)$  est un cycle hamiltonien de  $K_{n,n}$ .

Conclusion :  $K_{n,m}$  est hamiltonien si et seulement si  $n > 1$  et  $m = n$ .

4. On considère maintenant le graphe biparti complet  $K_{4,4}$  :



- (a) Déterminer la matrice d'adjacence  $A$  de  $K_{4,4}$  (avec la numérotation des sommets donnée ci-dessus).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer  $A^2$  et  $A^3$  sans faire de produit de matrices (Expliquer la méthode employée).

On utilise le théorème du cours qui dit que le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $A^k$  est égal au nombre de chaînes de longueur  $k$  entre les sommets  $i$  et  $j$ .

Il n'y a pas de chaîne de longueur 2 entre les sommets de  $\{1, 2, 3, 4\}$  et ceux de  $\{5, 6, 7, 8\}$ . Et entre deux sommets de  $\{1, 2, 3, 4\}$  (resp. de  $\{5, 6, 7, 8\}$ ), il y a exactement 4 chaînes de longueur 2 (il y a 4 possibilités pour le choix du sommet du milieu de la chaîne). D'où,

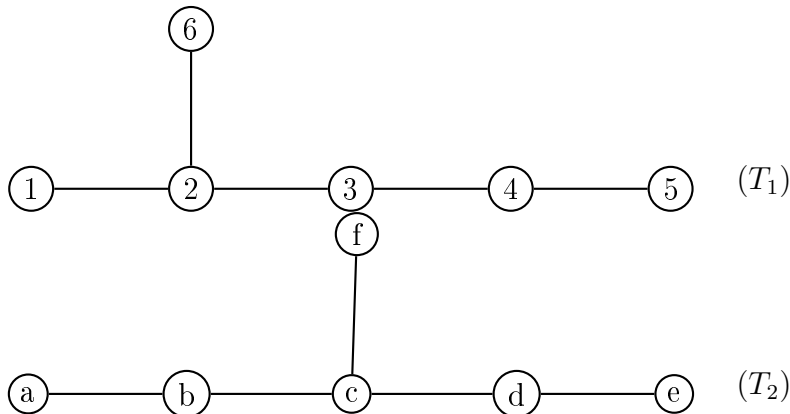
$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de chaîne de longueur 3 entre deux sommets de  $\{1, 2, 3, 4\}$  (resp. de  $\{5, 6, 7, 8\}$ ). Et entre un sommet de  $\{1, 2, 3, 4\}$  et un sommet de  $\{5, 6, 7, 8\}$ , il y a exactement 16 chaînes de longueur 3 (il y a 16 possibilités pour le choix des deux sommets du milieu de la chaîne). D'où,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5** 1. Donner deux arbres à 6 sommets qui ont la même suite de degrés mais qui ne sont pas isomorphes (il faut prouver qu'ils ne sont pas isomorphes).

On considère les deux arbres  $T_1$  et  $T_2$  ci-dessous :



Ces deux arbres ont la même suite de degrés qui est  $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$ . Vérifions qu'ils ne sont pas isomorphes. S'il existait un isomorphisme  $\Phi$  de  $T_1$  vers  $T_2$ . Alors, on aurait  $\Phi(2) = c$  car 2 (resp.  $c$ ) est le seul sommet de  $T_1$  (resp. de  $T_2$ ) de degré 3. Mais alors, les voisins de 2 par  $\Phi$  doivent être envoyés sur ceux de  $c$ . Or 2 a deux voisins de degrés 1 et un voisin de degré 2 et  $c$  a deux voisins de degrés 2 et un voisin de degré 1. Les voisins de  $c$  ne peuvent donc pas être les images par  $\Phi$  des voisins de 2. Et l'isomorphisme  $\Phi$  n'existe pas.

2. Soit  $T$  un arbre qui a exactement :

- 1 sommet de degré 5,
- 1 sommet de degré 4,
- 1 sommet de degré 3,
- 1 sommet de degré 2,
- $m$  sommets de degré 1.

Calculer  $m$ .

On note  $n$  le nombre de sommets de  $T$  et  $k$  son nombre d'arêtes. Alors, on a  $n = m + 4$  et comme  $T$  est un arbre, on a  $k = n - 1 = m + 3$ .

Par le lemme des poignées de mains, on obtient :

$$5 + 4 + 3 + 2 + m = 2k = 2m + 6$$

On résout cette équation et on obtient  $m = 8$ .

3. Soit  $G$  un graphe simple connexe à  $n$  sommets. On note  $v_1, \dots, v_n$  les sommets de  $G$ . Soit  $\delta$  la moyenne des degrés des sommets de  $G$ , c'est-à-dire,

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n \text{deg}(v_i)}{n}$$

Montrer que si  $\delta > 2$ , alors  $G$  contient au moins deux cycles.

On note  $k$  le nombre d'arêtes de  $G$ .

D'après le lemme des poignées de mains, on a  $2k = n\delta > 2n$ , donc,  $k > n$ .

D'après le théorème vu en cours, un arbre à  $n$  sommets a  $n - 1$  arêtes, donc  $G$  n'est pas un arbre et comme il est connexe, il a au moins un cycle  $C$ .

Soit  $e$  une arête du cycle  $C$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant l'arête  $e$ , alors,  $G'$  est toujours connexe et  $G'$  a  $n$  sommets et  $k - 1$  arêtes où  $k - 1 > n - 1$ . D'après le théorème déjà utilisé ci-dessus,  $G'$  ne peut être un arbre, donc  $G'$  contient au moins un cycle. Comme  $G$  contient un cycle de plus que  $G'$ ,  $G$  contient au moins deux cycles.