ÉLÉMENTS RÉGULIERS ET REPRÉSENTATIONS DE GELFAND-GRAEV DES GROUPES RÉDUCTIFS NON CONNEXES

par Karine Sorlin

Résumé. —

Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Soit σ un automorphisme rationnel quasi-central de G. Nous construisons ci-dessous l'équivalent des représentations de Gelfand-Graev du groupe $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$, lorsque σ est unipotent et lorsqu'il est semi-simple. Nous montrons de plus que ces représentations vérifient des propriétés semblables à celles vérifiées par les représentations de Gelfand-Graev dans le cas connexe en particulier par rapport aux éléments réguliers.

Karine Sorlin, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, F–80000 Amiens, France. • *E-mail :* `karine.sorlin@wanadoo.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C33;20G05.

Abstract (*Regular elements and Gelfand-Graev Representations for disconnected reductive groups*)

Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$ and let F be the corresponding Frobenius endomorphism. Let σ be a quasi-central automorphism of G, which means that σ is quasi-semi-simple (i.e. σ stabilises $(T \subset B)$ where T is a maximal torus included in a Borel subgroup B of G) and $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ for any quasi-semi-simple automorphism $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, where $\mathrm{ad}(g)$ is the conjugation by g for all $g \in G$. We suppose also that σ is rational.

We define in this article Gelfand-Graev representations for the group $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ when σ is unipotent and when it is semi-simple, which extend the σ-stable Gelfand-Graev representations for connected reductive groups.

Let T be a σ-stable rational maximal torus of G included in a σ-stable rational Borel subgroup of G. Let U be the unipotent radical of B.

In the connected reductive case, Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing an irreducible linear character of U^F which is called a regular character. We define a regular character of $U^F.\langle\sigma\rangle$ as the extension of a σ-stable regular character of U^F. When σ is unipotent, σ-stable Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing σ-stable regular characters of U^F. In this case, we define Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ as the representations obtained by inducing regular characters of $U^F.\langle\sigma\rangle$. When σ is semi-simple, The definition of Gelfand-Graev representations is more complicated.

Gelfand-Graev representations of $G^F.\langle\sigma\rangle$ have similar properties to Gelfand-Graev representations of G^F. They are multiplicity free and their Harish-Chandra restrictions to a rational σ-stable Levi subgroup included in a rational σ-stable parabolic subgroup still are Gelfand-Graev representations. We say that an element of $G.\sigma$ is regular if the dimension of its centralizer in G is minimal among all elements of $G.\sigma$. The dual of any Gelfand-Graev representation of $G^F.\sigma$ is zero outside regular unipotent elements of $G^F.\sigma$ when σ is unipotent (resp. outside regular pseudo-unipotent elements of $G^F.\sigma$, i.e. conjugate under G of regular elements of $U.\sigma$, when σ is semi-simple). Moreover, Gelfand-Graev representations can be used to calculate the average value of irreducible characters of $G^F.\langle\sigma\rangle$ on a set of G^F-classes of regular unipotent (resp. pseudo-unipotent) elements of $G^F.\sigma$ if σ is unipotent (resp. semi-simple). When σ is semi-simple, the characteristic can be chosen good for $(G^\sigma)^0$ and we can get the exact values of irreducible characters of $G^F.\langle\sigma\rangle$ on G^F-classes of regular pseudo-unipotent elements of $G^F.\sigma$.

1. Introduction

Les groupes réductifs non connexes de la forme $G.\langle\sigma\rangle$, où G est un groupe réductif connexe et σ un automorphisme de G, ont été étudiés par R. Steinberg [10], F. Digne et J. Michel [3] et G. Malle [6].

On suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, que F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant et que σ est un automorphisme quasi-central de G, ce qui signifie que σ est quasi-semi-simple (i.e. σ stabilise un couple $(T \subset B)$ où T est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de

Borel B de G) et $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où $\mathrm{ad}(g)$ est la conjugaison par g pour tout $g \in G$. On suppose de plus σ rationnel.

La notion d'élément quasi-central a été introduite par F. Digne et J. Michel dans [3]. Ils ont montré que pour tout automorphisme rationnel σ' de G, il existe g dans G tel que $\sigma' \circ \mathrm{ad}(g)$ soit rationnel quasi-central ([3] proposition 1.34). Quand σ' est un automorphisme quasi-semi-simple de G, alors $G^{\sigma'}$ est un groupe réductif ([4] théorème 1.8) et quand σ' est quasi-central, il y a de nombreuses similarités entre $G.\sigma'$ et $(G^{\sigma'})^0$, en particulier pour les systèmes de racines et les groupes de Weyl ([4] théorème 1.15), les caractères de Deligne-Lusztig ([3], section 4) et les représentations de Gelfand-Graev (section 5).

Le but de cet article est de définir des représentations de Gelfand-Graev pour $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ qui étendent les représentations de Gelfand-Graev σ-stables pour les groupes réductifs connexes. Soit T un tore maximal rationnel σ-stable de G inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. Soit U le radical unipotent de B. Dans le cas connexe, les représentations de Gelfand-Graev de G^F sont obtenues en induisant certains caractères irréductibles de U^F qu'on appelle caractères réguliers. Dans le cas non connexe, on définit un caractère régulier de $U^F.\langle\sigma\rangle$ comme l'extension d'un caractère régulier σ-stable de U^F. Nous nous placerons dans un des deux cas extrèmes σ unipotent ou σ quasi-semi-simple. Le cas général peut s'y ramener en utilisant la décomposition de Jordan de σ.

Lorsque σ est unipotent, les représentations de Gelfand-Graev σ-stables de G^F sont obtenues en induisant un caractère régulier σ-stable de U^F (proposition 5.1). Dans ce cas, on définit les représentations de Gelfand-Graev de $G^F.\langle\sigma\rangle$ comme les représentations obtenues en induisant les caractères réguliers de $U^F.\langle\sigma\rangle$ (définition 5.2). Quand σ est semi-simple, la proposition 5.1 n'est plus vraie. La définition des représentations de Gelfand-Graev est alors plus compliquée (définition 5.3).

Les représentations de Gelfand-Graev de $G^F.\langle\sigma\rangle$ ont les mêmes propriétés que les représentations de Gelfand-Graev de G^F. Leurs composantes irréductibles sont de multiplicité 1 (proposition 6.1). Leur restriction de Harish-Chandra à un sous-groupe de Levi σ-stable rationnel inclus dans un sous-groupe parabolique σ-stable rationnel est encore une représentation de Gelfand-Graev (proposition 6.4). On dit qu'un élément de $G.\sigma$ est régulier si la dimension de son centralisateur dans G est minimale parmi les éléments de $G.\sigma$. Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F.\sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents réguliers de $G^F.\sigma$ quand σ est unipotent (resp. en dehors des éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F.\sigma$, i.e. des conjugués sous G d'éléments réguliers de $U.\sigma$, quand σ est semi-simple) (proposition 7.2).

Les représentations de Gelfand-Graev peuvent être utilisées pour calculer la valeur moyenne des caractères irréductibles de $G^F.\langle\sigma\rangle$ sur un ensemble de classes de G^F-conjugaison d'éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers de $G^F.\sigma$ si σ est unipotent (resp. semi-simple) (théorème 8.4). Quand σ est semi-simple et quand la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, on peut alors obtenir les valeurs exactes des caractères irréductibles de $G^F.\langle\sigma\rangle$ sur les classes de G^F-conjugaison d'éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F.\sigma$.

2. Résultats généraux sur les groupes réductifs non connexes

Soit $\tilde{G}$ un groupe réductif non connexe. On note G la composante neutre de $\tilde{G}$. Nous utiliserons les définitions suivantes, introduites dans [4], qui généralisent les notions de tore et de sous-groupe de Borel:

Définition 2.1. — Un quasi-borel de $\tilde{G}$ est le normalisateur dans $\tilde{G}$ d'un sous-groupe de Borel de G. Un quasi-tore de $\tilde{G}$ est le normalisateur dans $\tilde{G}$ d'un couple $T \subset B$ formé d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel de G.

On note $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p à q éléments (q étant une puissance de p). Désormais et jusqu'à la fin de l'article, on considère un groupe réductif non connexe $\tilde{G}$ de la forme $\tilde{G} = G.\langle\sigma\rangle$, où G est un groupe réductif connexe sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ défini sur $\mathbb{F}_q$ (on note F l'endomorphisme de Frobenius correspondant) et σ un automorphisme de G. On dit que σ est quasi-semi-simple s'il fixe un couple (T, B) formé par un tore maximal T de G inclus dans un sous-groupe de Borel B de G.

Le théorème suivant explicite les relations qui existent alors entre G et le groupe G^σ des points de G fixes par σ.

Théorème 2.2. — *([4] théorème 1.8)*

(i) G^σ est un groupe réductif.

(ii) Soit T un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G. Soit Φ l'ensemble des racines relativement à (G,T). Si $\alpha \in \Phi$, si $\lambda \mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est l'ordre de la σ-orbite de α, on définit $C_{\sigma,\alpha} \in \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ par $\sigma^i(x_\alpha(\lambda)) = x_\alpha(C_{\sigma,\alpha}\lambda)$. Alors, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous σ vérifiant la condition

$$(*) \qquad C_{\sigma,\alpha} = \pm 1,$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de l'orbite dont la somme est une racine, sur l'ensemble des racines de $(G^\sigma)^0$ relativement à $(T^\sigma)^0$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ, où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ soit une racine, les orbites de α et de $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ ont même image et $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma,\alpha+\sigma^k(\alpha)}$.

On dit que σ est quasi-central s'il est semi-simple et si on a $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple σ' tel que $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où on note $\mathrm{ad}(g)$ la conjugaison par g pour tout $g \in G$.

THÉORÈME 2.3. — *([4] théorèmes 1.15, 1.29, 1.33 et 1.36 et [5] proposition 2.1)*

(i) Si σ est quasi-semi-simple, alors σ est quasi-central si et seulement si, pour tout couple (T, B), où T est un tore σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G, toute racine simple relativement à (T, B) vérifie la condition (*) du théorème 2.2.

(ii) Si σ est quasi-central, alors on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0.\mathrm{Z}(G^\sigma)$.

(iii) Si σ est quasi-central unipotent, alors G^σ est connexe et si T est un tore σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable, T^σ est connexe et on a $T = T^\sigma \times \mathcal{L}(T)$, où $\mathcal{L} : T \to T$ est définie par $t \mapsto t^{-1}\sigma(t)$.

(iv) Si σ est quasi-central et rationnel, alors, il existe un couple (T, B) formé par un tore maximal rationnel σ-stable T inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable B de G.

NOTATION 2.1. — Lorsque pour toute racine simple α, on a l'égalité $C_{\sigma,\alpha} = 1$, on dira que σ vérifie la condition (RS).

REMARQUE 2.4. — Lorsque σ est unipotent quasi-central, la condition (RS) est vérifiée.

Démonstration. — Comme σ est quasi-central, on a $C_{\sigma,\alpha} = \pm 1$ pour toutes les racines $\alpha \in \Pi$ et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de $\tilde{G}$ possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Mais, dans ce cas particulier, le cardinal de l'orbite de α est alors égal à $2k$, or, on a supposé σ unipotent, donc l'ordre de σ est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Mais comme l'ordre de α divise l'ordre de σ, c'est donc que la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vaut 2. Ainsi, on a encore $C_{\sigma,\alpha} = 1$. □

On supposera par la suite que σ est rationnel, quasi-central, unipotent ou semi-simple. On choisit un couple $T \subset B$ où T est un tore maximal rationnel σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. On note U le radical unipotent de B.

Soit Φ le système de racines de (G, T). On choisit sur Φ l'ordre tel que $U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$ et on note Π la base de racines correspondante. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on fixe un isomorphisme $x_\alpha : \overline{\mathbb{F}}_q^+ \to U_\alpha$ et on définit c_α par $\sigma(x_\alpha(a)) = x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha a)$ pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_q^+$, on note $o(\alpha) = \min\{i \mid \sigma^i(\alpha) = \alpha\}$, le cardinal de la σ-orbite de α, et on retrouve le coefficient $C_{\sigma,\alpha}$ du théorème 2.2, en effet, on a $C_{\sigma,\alpha} = \prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} c_{\sigma^i(\alpha)}$. Enfin, on pose $U^* = \prod_{\alpha \in \Phi^+ - \Pi} U_\alpha$ et $\tilde{U} = U/U^*$.

3. Eléments réguliers

Comme nous le verrons dans la section 7, les propriétés des représentations de Gelfand-Graev impliquent les éléments réguliers. Dans cette section, nous donnons leur définition et quelques unes de leurs propriétés. Nous allons nous intéresser particulièrement aux éléments réguliers de $G.\sigma$ qui sont unipotents lorsque σ est quasi-central unipotent et pseudo-unipotent lorsque σ est quasi-central semi-simple (lorsque σ est semi-simple, on appelle élément pseudo-unipotent de $G.\sigma$ tout conjugué sous G d'un élément de $U.\sigma$).

DÉFINITION 3.1. — Soit y un élément d'un groupe réductif non connexe H. Alors, y est dit régulier dans H si et seulement si la dimension de son centralisateur dans H est minimale dans la composante connexe $H^0.y$, où H^0 est la composante neutre de H.

3.1. Eléments unipotents réguliers de $G.\sigma$ lorsque σ est unipotent.

— On suppose que σ est unipotent quasi-central rationnel.

PROPOSITION 3.2. — *Les éléments unipotents réguliers existent dans $G.\sigma$ et ils sont tous conjugués sous G.*

Démonstration. — [9] corollaire I.4.8 □

PROPOSITION 3.3. — *Soit $u.\sigma \in G.\sigma$ un élément unipotent, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $u.\sigma$ est régulier.

b) $\dim(\mathrm{C}_G(u.\sigma)) = \mathrm{rg}(G^\sigma)$

c) $\dim(\mathcal{B}^G_{u.\sigma}) = 0$, où $\mathcal{B}^G_{u.\sigma}$ est la variété des sous-groupes de Borel de G normalisés par $u.\sigma$

d) $|\mathcal{B}^G_{u.\sigma}| = 1$

e) $u.\sigma$ est conjugué sous G à un élément de la forme:
$\prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)\prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda).\sigma$ où $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ est un système de représentants des σ-orbites dans Π et $\lambda \mapsto h(\lambda)$ la hauteur.

Démonstration. — [9] proposition II.10.2 □

THÉORÈME 3.4. — *Soit $u = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(\lambda_\alpha)$ un élément de U, alors, $u.\sigma$ est unipotent et il est régulier si et seulement si pour toute racine $\alpha \in \Pi$,*

$$\sum_{n=0}^{o(\alpha)-1} c_{\sigma^n(\alpha)}c_{\sigma^{n+1}(\alpha)}\ldots c_{\sigma^{o(\alpha)-1}(\alpha)}\lambda_{\sigma^n(\alpha)} \neq 0$$

Démonstration. — Soit u un élément de U. Soit k l'ordre de σ alors,

$$(u.\sigma)^k = u\sigma(u)\ldots\sigma^{k-1}(u).$$

Or, U est un sous-groupe σ-stable de G donc $u\sigma(u)\ldots\sigma^{k-1}(u)$ est un élément de U et est unipotent, cela suffit pour conclure que $u.\sigma$ l'est aussi car on est en caractéristique p.

On peut ainsi appliquer à $u.\sigma$ la proposition 3.3: l'élément $u.\sigma$ est régulier unipotent si et seulement si il est conjugué sous G à un élément de la forme

$$u_0.\sigma = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1) \prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda).\sigma,$$

où $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ est un système de représentants des σ-orbites dans Π et $\lambda \mapsto h(\lambda)$ la hauteur.

On peut tout d'abord remarquer que $u.\sigma$ et $u_0.\sigma$ sont conjugués sous G si et seulement si ils sont conjugués sous $T^\sigma U$. Soit en effet $x \in G$ tel que $u.\sigma = {}^x(u_0.\sigma)$ alors, ${}^x(u_0.\sigma) \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$, donc, $u_0.\sigma$ normalise ${}^{x^{-1}}B$, ce qui entraîne que $x \in B$ car $u_0.\sigma$ est unipotent régulier. De plus, supposons trouvé $b = vt \in TU$ tel que $u.\sigma = {}^b(u_0.\sigma)$, alors, $u^{-1}v^t u_0{}^{t\sigma(t)^{-1}}\sigma(v)^{-1} = \sigma(t)t^{-1}$, donc, $t \in T^\sigma$. Donc $u.\sigma$ est conjugué à $u_0.\sigma$ si et seulement si il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in U$ tels que $u = v^t u_0 \sigma(v)^{-1}$.

On note p la projection de U sur $\tilde{U} = U/U^*$.

Lemme 3.5. — *u est σ-conjugué à un élément de la forme:*

$$u_0 = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1) \prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda)$$

si et seulement si $p(u)$ est σ-conjugué à $\tilde{u}_0 = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1) \in \tilde{U}$.

Démonstration. — Pour tout $t \in T^\sigma$ on note Φ_t l'application de $U \times U$ dans U telle que $\Phi_t : (x,y) \mapsto y^t x\sigma(y)^{-1}$. Soit $t \in T^\sigma$, soit $(x,y) \in U \times U$ et soient x' et y' quelconques dans U^*, alors,

$$\Phi_t(xx', yy') = yy'^t(xx')\sigma(yy')^{-1} = y^t x\sigma(y)^{-1}w',$$

avec

$$w' = [([y', {}^t x]y'^t x'\sigma(y')^{-1}), \sigma(y)^{-1}]([y', {}^t x]y'^t x'\sigma(y')^{-1}) \in U^*.$$

Donc, pour tout $t \in T^\sigma$, l'application Φ_t passe au quotient: soit $\tilde{\Phi}_t : \tilde{U}\times\tilde{U} \to \tilde{U}$ telle que

$$\tilde{\Phi}_t(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{y}^t\tilde{x}\sigma(\tilde{y})^{-1}$$

pour tout $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{U}\times\tilde{U}$, alors, $p(\Phi_t(x,y)) = \tilde{\Phi}_t(p(x),p(y))$ pour tout couple (x,y) dans $U \times U$.

Ainsi, u est σ-conjugué à un élément de la forme

$$u_0 = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1) \prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda),$$

si et seulement si il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in U$ tels que $u = \Phi_t(u_0, v)$, ce qui implique que $p(u) = \tilde{\Phi}_t(p(u_0), p(v))$. Réciproquement, si on pose $\tilde{u_0} = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)$ dans U/U^* et si $p(u) = \tilde{\Phi}_t(\tilde{u_0}, p(v))$ alors $u = \Phi_t(u_0, v)$ pour un u_0 de la forme

$$u_0 = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1) \prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda).$$

Donc, pour que u soit σ-conjugué à un élément de la forme

$$u_0 = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1) \prod_{h(\lambda)\geq 2} x_\lambda(c_\lambda),$$

il faut et il suffit que $p(u)$ soit σ-conjugué à $\tilde{u}_0$. $\square$

Notons $o(i)$ le cardinal de la σ-orbite de α_i. D'après le lemme ci-dessus, pour que $u.\sigma = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(\lambda_\alpha).\sigma$ soit unipotent régulier, il faut et il suffit qu'il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in \tilde{U}$ tels que si $\tilde{u} = \prod_{\alpha\in\Pi} x_\alpha(\lambda_\alpha)$, alors, $\tilde{u} = v^t\tilde{u}_0\sigma(v)^{-1}$. On pose $v = \prod_{\alpha\in\Pi} x_\alpha(l_\alpha)$, alors,

$$\begin{aligned}
& \tilde{u} = v^t\tilde{u}_0\sigma(v)^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall i \in \{1,\dots,r\}, \forall j \in \{0,\dots,o(i)-1\} \\
& l_{\sigma^j(\alpha_i)} + \alpha_i(t) - c_{\sigma^{j-1}(\alpha_i)} l_{\sigma^{j-1}(\alpha_i)} = \lambda_{\sigma^j(\alpha_i)} \\
\Leftrightarrow\quad & \forall i \in \{1,\dots,r\},\ A_iL_i = B_i
\end{aligned}$$

$$\text{avec}\quad A_i = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & -c_{\sigma^{-1}(\alpha_i)} \\
-c_{\alpha_i} & 1\ 0 & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & \\
& & 1 & 0 & & \\
& & -c_{\sigma^{o(\alpha_i)-3}(\alpha_i)} & 1 & 0 & \\
& & & -c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} & 1 &
\end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} -\alpha_i(t) + \lambda_{\alpha_i} \\ \vdots \\ -\alpha_i(t) + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{pmatrix} \text{ et } L_i = \begin{pmatrix} l_{\alpha_i} \\ \vdots \\ l_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{pmatrix}$$

Soit $i \in \{1,\dots,r\}$, alors, d'après la remarque 2.4, le coefficient

$$C_{\sigma,\alpha_i} = c_{\alpha_i} \dots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}}$$

est égal à 1. Ainsi, A_i est une matrice $o(\alpha_i) \times o(\alpha_i)$ de rang $o(\alpha_i) - 1$, et $A_iL_i = B_i$ a une solution si et seulement si:

$$(*i) \begin{cases} (c_{\alpha_i} \dots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + \dots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + 1)\alpha_i(t) \\ = c_{\alpha_i} \dots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} \lambda_{\alpha_i} + \dots + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que $u.\sigma$ est unipotent régulier si et seulement s'il existe $t \in T^\sigma$ tel que $(*i)$ soit vérifié pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$. Or, un tel t existe si et seulement si le coefficient de $\alpha_i(t)$ dans le membre de gauche de $(*i)$ est non nul pour tout i, ce qui est vrai car pour tout r-uplet $(x_1, \ldots, x_r)$ de $(\overline{\mathbb{F}}_q^{\times})^r$, il existe $t \in T$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on ait $\alpha_i(t) = \ldots = \sigma^{o(i)-1}(\alpha_i)(t) = x_i$ ([3] lemme 0.22), et alors, on a $t \in T^\sigma$.

Ainsi, $u.\sigma$ est unipotent régulier si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$c_{\alpha_i} \ldots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} \lambda_{\alpha_i} + \ldots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \neq 0.$$

On retrouve alors l'équation du théorème 3.4 en multipliant l'équation ci-dessus par $c_{\sigma^{o(i)-1}(\alpha)}$. □

THÉORÈME 3.6. — *Le nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels dans $G.\sigma$ est égal à:*

$$|G^F|/(|(Z(G^\sigma)^0)^F| \times q^l),$$

où l est le rang semi-simple de G^σ.

Démonstration. — LEMME 3.7. — *Dans tout quasi-borel rationnel, il y a le même nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels de $G.\sigma$.*

Démonstration. — Le résultat est clair car le conjugué sous G^F d'un unipotent régulier rationnel l'est aussi et deux quasi-borel rationnels sont conjugués sous G^F. Donc la conjugaison envoie bijectivement les éléments unipotents réguliers rationnels de l'un sur ceux de l'autre. □

LEMME 3.8. — *Tout élément unipotent régulier rationnel est dans un quasi-borel rationnel.*

Démonstration. — Soit x un élément unipotent régulier rationnel. Soit B' l'unique sous-groupe de Borel de G normalisé par x. On a $F({}^xB') = {}^xF(B')$ car x est rationnel et $F({}^xB') = F(B')$ car x normalise B', donc, x normalise aussi $F(B')$. Mais, comme x normalise un unique sous-groupe de Borel de G, on a $F(B') = B'$. □

Un élément unipotent régulier rationnel de $G.\sigma$ est dans un seul quasi-borel et celui-ci est rationnel. Donc le nombre d'éléments unipotents réguliers de $(G.\sigma)^F$ est égal au nombre de sous-groupes de Borel rationnels de G multiplié par le nombre de tels éléments dans l'intersection de $G.\sigma$ et du quasi-borel rationnel $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$.

LEMME 3.9. — *L'ensemble des éléments réguliers unipotents de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B) \cap G.\sigma$ est de la forme $\mathcal{U}_B = \{bu\sigma(b)^{-1}.\sigma; b \in B\}$ où $u.\sigma$ est un élément unipotent régulier fixé de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$.*

Démonstration. — Soit $u.\sigma$ un élément unipotent régulier rationnel de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$. Soit $x \in G$ tel que ${}^{x}(u.\sigma) \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$. Alors, ${}^{xu\sigma x^{-1}}B = B$ ce qui entraîne que ${}^{u.\sigma}({}^{x^{-1}}B) = {}^{x^{-1}}B$. Or si $x \notin B$, on a ${}^{x^{-1}}B \neq B$ et ${}^{x^{-1}}B$ et B sont tous les deux normalisés par $u.\sigma$ ce qui est impossible car $u.\sigma$ est régulier. Ainsi, on a montré que tout $x \in G$ tel que ${}^{x}(u.\sigma) \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$ appartient à B. Par ailleurs, dans $G.\sigma$, il y a une unique classe unipotente régulière. Donc les éléments unipotents réguliers de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B) \cap G.\sigma$ sont les conjugués sous B de $u.\sigma$. Si on note $\mathcal{U}_B$ l'ensemble de ces éléments, on a $\mathcal{U}_B = \{bu\sigma(b)^{-1}.\sigma; b \in B\}$. □

Calculons le nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels dans l'intersection de $G.\sigma$ et du quasi-borel, $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$.

Soit $u_0.\sigma$ un élément de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$ unipotent régulier et rationnel. Alors, le nombre cherché est égal au nombre de conjugués de $u_0.\sigma$ sous B qui sont rationnels, c'est-à-dire au nombre de σ-conjugués de u_0 sous B qui sont rationnels. On pose $\tilde{B} = B/U^*$. Soit $\phi : B \to B$ définie par $b \mapsto bu_0\sigma(b)^{-1}$. Soient b et b' dans B tels qu' il existe $u \in U^*$ tel que $b' = bu$. Alors, on a $\phi(b') = \phi(b)v$ avec $v \in U^*$ (car B normalise U^*) et ϕ passe au quotient. Par ailleurs, d'après le lemme 3.5 et le e) de la proposition 3.3, le fait qu'un élément $u.\sigma$ où $u \in B$, est unipotent régulier ne dépend que de l'image de u dans U/U^* et tout élément rationnel de $\tilde{B}$ a un représentant rationnel dans B, cela montre donc que le nombre cherché est égal au nombre de σ-conjugués rationnels de $\tilde{u}_0$ sous $\tilde{B}$ (où on note $\tilde{u}_0$ l'image de u_0 dans $\tilde{B}$) multiplié par $|U^{*F}|$. On note $b.\tilde{u}_0$ l'action de σ-conjugaison de $b \in \tilde{B}$ sur $\tilde{u}_0$. Soit $\mathcal{O}_B = \{b.\tilde{u}_0; b \in \tilde{B}\}$. Alors, $\mathcal{O}_B$ est F-stable car $\tilde{u}_0$ est rationnel.

Proposition 3.10. — *([3] proposition 3.21)*

(i) Soit $g \in \tilde{B}$, alors, $g.\tilde{u}_0 \in \mathcal{O}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{F}}$ si et seulement si $g^{-1}\ {}^{F}g \in \mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$ (où on a posé $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0) = \{g \in \tilde{B} \mid g.\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0\}$).

(ii) Il y a une application bien définie qui envoie la $\tilde{B}^F$-orbite de $g.\tilde{u}_0 \in \mathcal{O}_B^F$ sur la classe de F-conjugaison de l'image de $g^{-1F}g$ dans $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0$, c'est une bijection et le stabilisateur de $g.\tilde{u}_0$ dans $\tilde{B}^F$ est isomorphe au F-centralisateur de $g^{-1F}g$ dans $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$.

D'après le (i), si $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$ est abélien, le nombre d'éléments est le même dans toutes les $\tilde{B}^F$-orbites et vaut $|\tilde{B}^F/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|$. Cela entraîne avec le (ii) que le nombre de σ-conjugués de $\tilde{u}_0$ dans $\tilde{B}^F$ est égal au nombre de F-classes de conjugaison de $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0$ multiplié par $|\tilde{B}^F/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|$. On note $\mathrm{H}^1(F,H)$ l'ensemble des classes de F-conjugaison d'un groupe algébrique H défini sur $\mathbb{F}_q$. On a $\mathrm{H}^1(F,H) = \mathrm{H}^1(F,H/H^0)$. Et si H/H^0 est abélien, $|\mathrm{H}^1(F,H/H^0)| = |H^F/(H^0)^F|$.

Lemme 3.11. — $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0) = \mathrm{Z}(G)^{\sigma} \times \tilde{U}^{\sigma}$.

En utilisant le lemme ci-dessus, on obtient l'expression suivante du nombre d'éléments réguliers unipotents de $(G^1)^F$:

$$
\begin{aligned}
&(|G^F|/|B^F|) \times |(U^*)^F| \times |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)| \times (|\tilde{B}^F|/|\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|) \\
= &\; |G^F|/(|(U^*)^F| \times |\tilde{B}^F|) \; \times |(U^*)^F| \times |\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F/(\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)^F| \times (|\tilde{B}^F|/|\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|) \\
= &\; |G^F|/|(\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)^F| \\
= &\; |G^F|/(|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F| \times |(\tilde{U}^\sigma)^F|)
\end{aligned}
$$

Or, $\tilde{U}^\sigma = (\prod_{\alpha\in\Pi} U_\alpha)^\sigma$ est isomorphe à $\prod_{\alpha\in\Pi/\sigma} U_\alpha$, car les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1 (remarque 2.4) donc $|((\prod_{\alpha\in\Pi} U_\alpha)^F)^\sigma| = q^l$, où q est le rang semi-simple de $(G^\sigma)^0 = G^\sigma$. Donc, pour terminer la démonstration du théorème, il reste à démontrer le lemme 3.11:

Démonstration. — Par définition, $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0) = \{b \in \tilde{B} \mid b.\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0\}$.

Soient $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ un ensemble de représentants des σ-orbites de Π. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $O(i)$ la σ-orbite de α_i, $o(i)$ le cardinal de $O(i)$ et $U(i) = \prod_{\alpha\in O(i)} U_\alpha$, enfin, on pose $\tilde{u}_0 = \prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha)$ et $u = \prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(l_\alpha)$.

Nous allons, dans les calculs qui suivent, expliciter $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$. Soit $b = ut \in \tilde{B}$:

$$
\begin{aligned}
&(ut)\tilde{u}_0\sigma(ut)^{-1} = \tilde{u}_0 \\
\Leftrightarrow\; &({}^t\tilde{u}_0)^{-1}u^{-1}\tilde{u}_0\sigma(u) = t\sigma(t)^{-1} \\
\Leftrightarrow\; &t \in T^\sigma \textit{ et } u\,{}^t\tilde{u}_0\sigma(u)^{-1}\tilde{u}_0^{-1} = 1 \\
&(\text{car } ({}^t\tilde{u}_0)^{-1}u^{-1}\tilde{u}_0\sigma(u) \in \tilde{U} \textit{ et } t\sigma(t)^{-1} \in T) \\
\Leftrightarrow\; &t \in T^\sigma \\
\text{et } &\prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(l_\alpha)^t(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha))\sigma(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(l_\alpha))^{-1}(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha))^{-1} = 1 \\
\Leftrightarrow\; &t \in T^\sigma \\
\text{et } &\prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(l_\alpha) \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\alpha(t)k_\alpha)(\prod_{\alpha\in O(i)} x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha l_\alpha))^{-1}(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha))^{-1} = 1 \\
\Leftrightarrow\; &t \in T^\sigma \\
\text{et } &\prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(l_\alpha + \alpha(t)k_\alpha - c_{\sigma^{-1}\alpha}l_{\sigma^{-1}\alpha} - k_\alpha) = 1 \\
\Leftrightarrow\; &t \in T^\sigma \\
\text{et } &\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \forall\alpha \in O(i),\; l_\alpha + \alpha(t)k_\alpha - c_{\sigma^{-1}\alpha}l_{\sigma^{-1}\alpha} - k_\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

On obtient le système d'équations suivant pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$

$$(I)\left\{\begin{array}{l} l_{\alpha_i} - c_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} l_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} = (1-\alpha_i(t))k_{\alpha_i} \\ l_{\sigma(\alpha_i)} - c_{\alpha_i} l_{\alpha_i} = (1-\alpha_i(t))k_{\sigma(\alpha_i)} \\ \ldots \\ l_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} - c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} l_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} = (1-\alpha_i(t))k_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{array}\right.$$

(car $t \in T^\sigma$ donc $\alpha(t) = \alpha_i(t)\ \forall \alpha \in O(i)$).

Or, $C_{\sigma,\alpha} = 1$ (remarque 2.4), donc le système (I) est de rang $o(\alpha_i) - 1$ et il existe des solutions si et seulement si:

$$(c_{\alpha_i} \ldots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} k_{\alpha_i} + \ldots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} k_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}} + k_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}})(1-\alpha_i(t)) = 0$$

D'après le théorème 3.4, l'équation ci-dessus entraîne que $t \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ et que:

$$\left\{\begin{array}{l} l_{\sigma(\alpha_i)} = c_{\alpha_i} l_{\alpha_i} \\ \ldots \\ l_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} = c_{\alpha_i} \ldots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} l_{\alpha_i} \end{array}\right.$$

Donc, $t \in \cap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\alpha_i \cap T^\sigma = \mathrm{Z}(G)^\sigma$ et, si on note $u = \prod_{i=1}^r u_i$ avec $u_i \in U(i)$ alors, on a $u_i \in U(i)^\sigma$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

On démontre facilement que réciproquement

$$\mathrm{Z}(G)^\sigma \times (\prod_{i=1}^r U(i)^\sigma) \subset \mathrm{Stab}(\tilde{u}_0).$$

D'où l'égalité. Ce qui termine les démonstrations du lemme 3.11 et du théorème 3.6. $\square$

$\square$

3.2. Eléments pseudo-unipotents réguliers de $G.\sigma$ lorsque σ est semi-simple.

— On suppose que σ est semi-simple quasi-central rationnel.

On rappelle que l'on appelle éléments pseudo-unipotents de $G.\sigma$ les conjugués sous G des éléments de $U.\sigma$. Avant d'étudier les éléments pseudo-unipotents réguliers de $G.\sigma$, on étudie les éléments réguliers de $U.\sigma$.

PROPOSITION 3.12. — *Tout élément de $U.\sigma$ est conjugué sous U à un élément de $U^\sigma.\sigma$.*

Démonstration. — LEMME 3.13. — *Tout élément semi-simple $v.\sigma$ de $U.\sigma$ est conjugué sous U à σ.*

Démonstration. — Selon [10] (proposition 7.6), tout automorphisme semi-simple d'un groupe résoluble stabilise un tore maximal de ce groupe. Or, tout élément semi-simple $v.\sigma$ avec $v \in U$ induit un automorphisme semi-simple de B et donc stabilise un tore maximal ${}^xT$ de B, conjugué de T par un élément x de U. Ainsi, $x^{-1}(v.\sigma)x$ est un élément de $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(T) \cap U.\sigma = \{\sigma\}$ ce qui montre directement que $v.\sigma$ est conjugué à σ sous U. $\square$

Soit $x.\sigma \in U.\sigma$, on note $x.\sigma = us$ la décomposition de Jordan de $x.\sigma$. Alors, $u \in U$ car σ est semi-simple et s est de la forme $v.\sigma$ avec $v \in U$. On applique à $s = v.\sigma$ le lemme précédent, il existe $w \in U$ tel que $x.\sigma = w({}^{w^{-1}}u)\sigma w^{-1}$ et ${}^{w^{-1}}u \in U^\sigma$ car u commute à s donc ${}^{w}u$ commute à ${}^{w^{-1}}s = \sigma$. □

COROLLAIRE 3.14. — *Un élément $u.\sigma \in U.\sigma$ est régulier si et seulement si il est conjugué sous U à un élément $v.\sigma \in U^\sigma.\sigma$ tel que v soit régulier dans G^σ.*

Démonstration. — Selon la proposition précédente, $u.\sigma \in U.\sigma$ est conjugué sous U à un élément $v.\sigma \in U^\sigma.\sigma$. Par unicité de la décomposition de Jordan de $v.\sigma$, on a $\mathrm{C}_G(v.\sigma) = \mathrm{C}_{G^\sigma}(v)$ et la dimension de $\mathrm{C}_G(v.\sigma) = \mathrm{C}_{G^\sigma}(v)$ est minimale si et seulement si la dimension de $\mathrm{C}_G(v.\sigma) = \mathrm{C}_{G^\sigma}(v)$ l'est aussi. □

PROPOSITION 3.15. — *Il existe une unique G-classe de conjugaison pseudo-unipotente régulière dans $G.\sigma$.*

Démonstration. — Par le corollaire 3.14, toute classe pseudo-unipotente régulière a un représentant $v.\sigma$ dans $U^\sigma.\sigma$ avec v régulier dans G^σ et $v \in U^\sigma \subset (G^\sigma)^0$. Comme tous les éléments réguliers de $(G^\sigma)^0$ sont conjugués dans $(G^\sigma)^0$ ([3] proposition 14.16), on obtient le résultat. □

On a l'analogue de 3.3 d):

PROPOSITION 3.16. — *Un élément pseudo-unipotent régulier normalise un unique sous-groupe de Borel de G.*

Démonstration. — on se ramène à un élément unipotent régulier de la forme $u.\sigma$ avec $u \in U$. En utilisant le corollaire 3.14, on peut se ramener au cas où u est σ-stable, régulier dans $(G^\sigma)^0$. Alors, si $u.\sigma$ est contenu dans un quasi-borel, ses parties semi-simples et unipotentes le sont aussi, donc tout sous-groupe de Borel normalisé par $u.\sigma$, l'est aussi par u et par σ.

Supposons que u normalise un sous-groupe de Borel σ-stable de G autre que B, alors, comme deux sous-groupes σ-stables ont un tore σ-stable en commun, on peut se ramener au cas où il existe $n \in (\mathrm{N}_G(T))^\sigma$ tel que $u \in U \cap {}^nU$. On note $u = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(k_\alpha)$. Soit $w \in W^\sigma$ tel que n soit un représentant de w. Alors, pour toute racine $\alpha \in \Pi$ telle que $w(\alpha) \in \Phi^-$, on a $k_\alpha = 0$. Si $w \neq 1$, alors, comme w est σ-stable, il existe une σ-orbite $\mathcal{A}$ de Π telle que pour toute racine $\alpha \in \mathcal{A}$, on ait $k_\alpha = 0$. Or, cela contredit le fait que u soit régulier dans $(G^\sigma)^0$, d'où le résultat. □

4. Caractères réguliers

On garde les notations de la section 2, en particulier, on note Φ l'ensemble des racines associées à (G, T) et Π la base de racines associée à B. Alors, $(B^\sigma)^0$ est un sous-groupe de Borel du groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$ de décomposition de Levi $(B^\sigma)^0 = (T^\sigma)^0 U^\sigma$. On note Φ^σ l'ensemble des racines associées à

$((G^\sigma)^0, (T^\sigma)^0)$ et Π/σ la base de racines associée à $(B^\sigma)^0$. De plus, τ sera l'action de F sur les racines, et si $\mathcal{O}$ est une τ-orbite de Π, alors, on note $U_{\mathcal{O}}$ l'image de $\prod_{\alpha\in\mathcal{O}} U_\alpha$ dans U/U^*, et Π/τ l'ensemble des τ-orbites de Π. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on fixe un isomorphisme $x_\alpha : \overline{\mathbb{F}_q}^+ \to U_\alpha$ tel que $F(x_\alpha(a)) = x_{\tau(\alpha)}(a^q)$ et on définit comme dans la section précédente le coefficient c_α pour toute racine $\alpha \in \Phi$ par $\sigma(x_\alpha(a)) = x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha a)$. On fixe $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s\}$, un ensemble de représentants des σ-orbites de Π/τ.

Dans le cas des groupes réductifs connexes, les représentations de Gelfand-Graev sont obtenues en induisant certains caractères linéaires irréductibles de U^F appelés caractères réguliers. Nous généralisons la notion de caractères réguliers dans la définition 4.1.

Notation 4.1. — Soit χ un caractère linéaire de U^F tel que sa restriction à $(U^*)^F$ soit triviale. Alors, χ se factorise à travers $(U/U^*)^F \simeq U^F/U^{*F}$. On identifie de cette façon χ à un caractère $\overline{\chi}$ de $U^F/U^{*F} \simeq \prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} U_{\mathcal{O}}^F$.

Pour toute partie F-stable I de Π,

(i) on note U_I l'image de $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ dans U/U^*,

(ii) on définit $\chi|_{U_I^F}$ comme la restriction de $\overline{\chi}$ à U_I^F.

Définition 4.1. — Un caractère multiplicatif $\tilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(U^F.\langle\sigma\rangle)$ est appelé caractère régulier si pour tout $u \in U^F$:

$$\tilde{\chi}(u.\sigma) = \chi(u)\tilde{\chi}(\sigma),$$

où χ est un caractère σ-stable de $\mathrm{Irr}(U^F)$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

(i) La restriction de χ à $(U^*)^F$ est triviale.

(ii) Pour toute τ-orbite $\mathcal{O}$ de Π, $\chi|_{U_{\mathcal{O}}^F}$ n'est pas triviale.

Sous ces conditions, on dit que χ est régulier et pour tout caractère régulier σ-stable χ de U^F, on note $\tilde{\chi}$ et on appelle extension normalisée de χ, l'extension de χ à $U^F.\langle\sigma\rangle$ telle que $\tilde{\chi}(\sigma) = 1$.

Remarque 4.2. — Plaçons-nous dans le cas du groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$. Les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ sont définis par les conditions (i) et (ii) de la définition précédente en remplaçant U par U^σ et Π par Π/σ.

Proposition 4.3. — *On suppose que la condition (RS) est vérifiée. Alors, il existe une bijection entre les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ et les caractères réguliers σ-stables de U^F.*

Démonstration. — La démonstration repose sur une série de lemmes numérotés de 4.4 à 4.10.

Lemme 4.4. — *Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, et pour tout entier k, on a $c_{\tau^k(\alpha)} = (c_\alpha)^{q^k}$.*

Démonstration. — Soient $\alpha \in \Phi$ et un entier k, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^+$, on a

$$\sigma(F^k(x_\alpha(\lambda))) = \sigma(x_{\tau^k(\alpha)}(\lambda^{q^k})) = x_{\sigma(\tau^k(\alpha))}(c_{\tau^k(\alpha)}\lambda^{q^k})$$

et

$$F^k(\sigma(x_\alpha(\lambda))) = F^k(x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha\lambda)) = x_{\tau^k(\sigma(\alpha))}((c_\alpha)^{q^k}\lambda^{q^k}).$$

Or, les actions de σ et F commutent, donc, $\sigma(F^k(x_\alpha(\lambda))) = F^k(\sigma(x_\alpha(\lambda)))$ et $\sigma \circ \tau^k = \tau^k \circ \sigma$, ce qui entraîne le résultat. □

Remarque 4.5. — Le lemme 4.4 entraîne que pour tout $\alpha \in \Phi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α alors, le coefficient c_α est dans $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$.

Lemme 4.6. — *On considère la τ-orbite $\mathcal{O} = \{\alpha, \tau(\alpha), \ldots, \tau^{k-1}(\alpha)\}$ d'une racine $\alpha \in \Pi$. Soit $\mathcal{A} = \{\alpha, \sigma(\alpha), \ldots, \sigma^{n-1}(\alpha)\}$ la σ-orbite de α. Soient $a \in \{1, \ldots, k\}$ le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et $o \in \{1, \ldots, n\}$ le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}$. Alors, il existe un entier r tel que $k = a \times r$ et $n = o \times r$.*

Démonstration. — Pour tout entier t, on a

$$\begin{aligned} \sigma^t(\mathcal{O}) &= \{\sigma^t(\alpha), \tau(\sigma^t(\alpha)), \ldots, \tau^{k-1}(\sigma^t(\alpha))\} \\ \text{et} \quad \tau^t(\mathcal{A}) &= \{\tau^t(\alpha), \sigma(\tau^t(\alpha)), \ldots, \sigma^{n-1}(\tau^t(\alpha))\}. \end{aligned}$$

Par définition de o et de a, on a $\sigma^o(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et $\tau^a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. De plus, on a l'égalité: $\mathcal{O} \cup \ldots \cup \sigma^{o-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{A} \cup \ldots \cup \tau^{a-1}(\mathcal{A})$, ce qui entraîne que

(1) $o \times k = a \times n$.

Par ailleurs, $\sigma^n(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et $\tau^k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, donc il existe deux entiers u et v tels que

(2) $n = u \times o$

et

(3) $k = v \times a$.

On obtient donc la relation $u = v$, ce qui conclut la démonstration du lemme 4.6. □

Lemme 4.7. — *On suppose que σ est quasi-central et que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$. Soit $\alpha \in \Pi$, soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$ respectivement la σ-orbite et la τ-orbite de α, soit o le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}$ et a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$, soit $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{O}|\}$ tel que $\sigma^o(\alpha) = \tau^i(\alpha)$ et soit $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{A}|\}$ tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$, enfin soit r tel que $|\mathcal{A}| = r \times o$, alors,*

$$\begin{aligned} (c_\alpha \ldots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)})^{1+q^i+\ldots+q^{(r-1)i}} &= 1 \\ \textit{et} \quad (c_\alpha \ldots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)})^{1+q^a+\ldots+q^{(r-1)a}} &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. —

$$
\begin{aligned}
&(c_\alpha \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)})^{1+q^i+\dots+q^{(r-1)i}} \\
&= c_\alpha \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_\alpha^{q^i} \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}^{q^i} \dots c_\alpha^{q^{(r-1)i}} \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}^{q^{(r-1)i}} \\
&= c_\alpha \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_{\tau^i(\alpha)} \dots c_{\sigma^{o-1}(\tau^i(\alpha))} \dots c_{\tau^{(r-1)i}(\alpha)} \dots c_{\sigma^{o-1}(\tau^{(r-1)i}(\alpha))} \\
&= c_\alpha \dots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_{\sigma^{o}(\alpha)} \dots c_{\sigma^{2o-1}(\alpha)} \dots c_{\sigma^{(r-1)o}(\alpha)} \dots c_{\sigma^{ro-1}(\alpha)} \\
&= c_\alpha \dots c_{\sigma^{|\mathcal{A}|-1}(\alpha)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

On montre de la même façon que

$$(c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)})^{1+q^a+\dots+q^{(r-1)a}} = 1.$$

□

LEMME 4.8. — *Soit $\alpha \in \Pi$, on note H le sous-réseau de $\mathbb{Z}^2$ défini par*

$$H = \{(i,j) | \tau^i(\alpha) = \sigma^j(\alpha)\}.$$

Si n est le cardinal de la σ-orbite de α, et si $a > 0$ est minimal tel qu'il existe un entier l tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^l(\alpha)$ (si $\mathcal{A}$ est la σ-orbite de α, alors, a est le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$) et si j est tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$, alors, H est engendré par les couples $(0,n)$ et (a,j).

Démonstration. — Soit p_1 la première projection de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$, alors, l'image de H par p_1 est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ égal à $a.\mathbb{Z}$ par définition de a. Ainsi, pour tout $(k,l) \in H$, il existe un entier s tel que $k - sa = 0$, on a alors, $(0, l-sj) \in H$, c'est-à-dire, $\sigma^{l-sj}(\alpha) = \alpha$, ce qui entraîne que n divise $l - sj$. Donc, pour tout $(k,l) \in H$, il existe deux entiers s et t tels que $(k,l) = s(a,j) + t(0,n)$, ce qui montre que H est engendré par les couples $(0,n)$ et (a,j). □

LEMME 4.9. — *On suppose que σ est quasi-central et que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$. Pour toute racine $\alpha \in \Pi$, si on note $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α, $\mathcal{A}$ sa σ-orbite et a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et j l'élément de $\{1, \dots, \mathcal{A}\}$ tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$, alors, on peut choisir pour tout $\beta \in \mathcal{A}$, l'isomorphisme $x_\beta : \overline{\mathbb{F}_q}^+ \to U_\beta$ de façon à ce que $c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)} = 1$.*

Démonstration. — On s'est donné pour tout $\alpha \in \Phi$, des isomorphismes $x_\alpha : \overline{\mathbb{F}_q}^+ \to U_\alpha$ tels que $F(x_\alpha(\lambda)) = x_{\tau(\alpha)}(\lambda^q)$ pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}^+$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{F}_q}^+$, alors, on peut définir la famille d'isomorphismes $(x'_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ par la relation $x'_\alpha(\lambda) = x_\alpha(a_\alpha \lambda)$ pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}^+$.

Les isomorphismes vérifient $F(x'_\alpha(\lambda)) = x'_{\tau(\alpha)}(\lambda^q)$ pour tout $\alpha \in \Phi$, si et seulement si on a $a_{\tau(\alpha)} = a_\alpha^q$, c'est l'hypothèse que l'on va faire sur les a_α désormais.

Pour tout $\alpha \in \Phi$, on définit c'_α par $\sigma(x'_\alpha(\lambda)) = x'_{\sigma(\alpha)}(c'_\alpha\lambda)$ pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}^+$, alors, $c'_\alpha = c_\alpha \times a_\alpha / a_{\sigma(\alpha)}$. Pour tout $\alpha \in \Pi$, on a

$$c'_\alpha \dots c'_{\sigma^{|\mathcal{A}|-1}(\alpha)} = C_{\sigma,\alpha} = 1,$$

où $\mathcal{A}$ est la σ-orbite de α.

Soit $\alpha \in \Pi$, soit a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et j l'élément de $\{1, \dots, \mathcal{A}\}$ tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$, alors,

$$c'_\alpha \dots c'_{\sigma^{j-1}(\alpha)} = a_\alpha^{1-q^a} c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}.$$

On a vu (lemme 4.7) que

$$(c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)})^{1+q^a+\dots+q^{(r-1)a}} = (c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)})^{(q^{ra}-1)/(q^a-1)} = 1,$$

donc, il existe $a_\alpha \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, tel que

$$(a_\alpha)^{q^a-1} = c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)},$$

ce qui termine la démonstration. □

On suppose dans la suite que les isomorphismes x_β vérifient la propriété du lemme 4.9.

NOTATION 4.2. — Pour toute racine $\alpha \in \Pi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on définit l'isomorphisme u_α de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$ dans $U_{\mathcal{O}}^F$ par

$$\lambda \mapsto u_\alpha(\lambda) = x_\alpha(\lambda) \dots x_{\tau^{|\mathcal{O}|-1}(\alpha)}(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|-1}}).$$

Si $\tilde{\chi}$ est un caractère régulier normalisé de $U^F.\langle\sigma\rangle$, il existe $\chi \in \mathrm{Irr}(U^F)$ régulier σ-stable tel que $\tilde{\chi}$ soit l'extension triviale de χ à $U^F.\langle\sigma\rangle$. Pour tout $\alpha \in \Pi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on note χ_α le morphisme de $\mathbb{F}^+_{q^{|\mathcal{O}|}}$ dans $\mathbb{C}^\times$ défini par $\lambda \mapsto \chi \circ u_\alpha(\lambda)$. Alors, le caractère χ est défini par la donnée de $(\chi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ avec pour toute racine $\alpha \in \Pi$ les relations suivantes:

$$\chi_{\tau(\alpha)}(\lambda^q) = \chi_\alpha(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α.

Soit $\{\alpha_1, \dots \alpha_r\}$ un ensemble de représentants des τ-orbites de Π, alors, on a pour tout $u \in \prod_{i=1}^r u_{\alpha_i}(\lambda_{\alpha_i})(U^*)^F$, la formule suivante qui ne dépend pas du choix de l'ensemble $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$:

$$\chi(u) = \prod_{i=1}^r \chi_{\alpha_i}(\lambda_{\alpha_i}).$$

On note $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s\}$ un ensemble de représentants des σ-orbites de Π/τ. Dans toute τ-orbite $\mathcal{O}_r$, on choisit un élément α_r. Pour tout $r \in \{1, \dots, s\}$, $\mathcal{A}_r$ est la σ-orbite de α_r, $a(r)$ le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}_r$ et $o(r)$ le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}_r$. On fixe un entier N multiple de $|\mathcal{O}|$ pour toute τ-orbite

$\mathcal{O}$ de racines de Π. On fixe un caractère ϕ_0 de $\mathbb{F}_{q^N}^+$ tel que la restriction de ϕ_0 à $\mathbb{F}_q^+$ soit non triviale.

LEMME 4.10. — *On suppose que σ est quasi-central et que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$. Pour tout $r \in \{1, \ldots, s\}$, pour tout caractère linéaire σ-stable χ_r du sous-groupe $\prod_{i=0}^{o(r)-1} U^F_{\sigma^i(\mathcal{O}_r)}$ de $(U/U^*)^F$, il existe un $d_r \in \mathbb{F}_{q^{a(r)}}$ tel que:*

$$\begin{aligned}&\chi_r(\prod_{i=0}^{o(r)-1} u_{\sigma^i(\alpha_r)}(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}))\\ &= \phi_0 \circ \mathrm{Tr}_r(d_r(\lambda_{\alpha_r} + (1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)} \ldots + (1/(c_{\alpha_r} \ldots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)}))\end{aligned}$$

où $\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)} \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ et où Tr_r est la trace de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ dans $\mathbb{F}_{q^{a(r)}}$. Tout caractère linéaire σ-stable χ de $(U/U^*)^F$ est de la forme $\chi = \prod_{r=1}^s \chi_r$, où χ_r est comme ci-dessus. De plus, l'application

$$\Psi : \chi \mapsto (d_1, \ldots, d_s)$$

est un isomorphisme : $(((U/U^*)^F)^\wedge)^\sigma \to \prod_{r=1}^s \mathbb{F}_{q^{a(r)}}^+$ et χ est régulier si et seulement si aucun des d_r n'est nul.

Démonstration. — Soit $(s,t) \in H$ le sous-réseau du lemme 4.8, alors, dans $\tilde{U} = U/U^*$:

$$\begin{aligned}\sigma^t(u_\alpha(\lambda)) &= x_{\sigma^t(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda) \ldots x_{\tau^{|\mathcal{O}|-1}(\sigma^t(\alpha))}((c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-1}})\\ &= x_{\tau^s(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda) \ldots x_{\tau^{|\mathcal{O}|+s-1}(\alpha)}((c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-1}})\\ &= u_{\tau^s(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)\end{aligned}$$

Donc, si $\sigma^t(\alpha) = \tau^s(\alpha)$, alors, $\sigma^t(u_\alpha(\lambda)) = u_{\tau^s(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)$, comme éléments de U/U^*.

Pour que χ soit un caractère régulier σ-stable de U^F, il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in \Pi$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on ait,

$$\chi_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha\lambda) = \chi_\alpha(\lambda),$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que pour tout couple (s,t) tel que $\sigma^t(\alpha) = \tau^s(\alpha)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, on ait

$$\chi_{\sigma^t(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda) = \chi_{\tau^s(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda) = \chi_\alpha(\lambda),$$

Par le lemme 4.8, cette condition est équivalente à la condition suivante pour toute racine $\alpha \in \Pi$, où on aura noté $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α, $\mathcal{A}$ sa σ-orbite, a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$, et où on aura défini j comme l'élément de $\{1, \ldots, |\mathcal{O}|\}$ tel que $\sigma^j(\alpha) = \tau^a(\alpha)$,

$$\chi_{\tau^a(\alpha)}(c_\alpha \ldots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\lambda) = \chi_\alpha(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}},$$

c'est-à-dire,

$$\chi_\alpha((c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-a}}) = \chi_\alpha(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}},$$

c'est-à-dire,

$$\chi_\alpha(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|-a}}) = \chi_\alpha(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}},$$

car on a fait en sorte que $c_\alpha \dots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)} = 1$ grâce au lemme 4.9. Par ailleurs, un caractère ϕ de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$ vérifie $\phi(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|-a}}) = \phi(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, si et seulement si $\phi(\lambda^{q^a}) = \phi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, car $\lambda^{q^a} = \mu \Leftrightarrow \lambda = \mu^{q^{|\mathcal{O}|-a}}$.

Ainsi, si χ_r est un caractère linéaire σ-stable de $\prod_{i=0}^{o(r)-1} U^F_{\sigma^i(\mathcal{O}_r)}$ avec $r \in \{1,\dots,s\}$, il existe un caractère ϕ_r de $\mathbb{F}^+_{q^{a(r)}}$ tel que:

$$\begin{aligned}&\chi_r(\prod_{i=0}^{o(r)-1} u_{\sigma^i(\alpha_r)}(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}))\\ &= \phi_r \circ \mathrm{Tr}_r(\lambda_{\alpha_r} + (1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)} \dots + (1/(c_{\alpha_r} \dots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)}),\end{aligned}$$

où $\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)} \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ et où Tr_r est la trace de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ dans $\mathbb{F}_{q^{a(r)}}$. C'est-à-dire, il existe un $d_r \in \mathbb{F}_{q^{a(r)}}$ tel que:

$$\begin{aligned}&\chi_r(\prod_{i=0}^{o(r)-1} u_{\sigma^i(\alpha_r)}(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}))\\ &= \phi_0 \circ \mathrm{Tr}_r(d_r(\lambda_{\alpha_r} + (1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)} \dots + (1/(c_{\alpha_r} \dots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)})).\end{aligned}$$

Et le caractère χ est σ-stable si et seulement si $\chi = \prod_{r=1}^s \chi_r$, où χ_r est comme ci-dessus, de plus, il est régulier si et seulement si les d_r sont non nuls.

Les autres assertions du lemme 4.10 sont claires. □

On peut appliquer le lemme 4.10, non seulement à $G.\langle\sigma\rangle$ mais aussi au groupe réductif $(G^\sigma)^0.\langle\sigma\rangle$. Cela montre que les caractères réguliers σ-stables de $U^F/(U^*)^F$ et les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F/((U^\sigma)^*)^F$ sont en bijection avec le même ensemble. La proposition 4.3 s'en déduit immédiatement. □

Corollaire 4.11. — *Supposons la condition (RS) vérifiée. Alors, les caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramétrés par $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, où $\mathcal{L}_{(T^\sigma)^0}$ est l'application de Lang de $(T^\sigma)^0$ dans $(T^\sigma)^0$ définie par $t \mapsto t^{-1}F(t)$.*

Démonstration. — Selon la proposition 14.28 de [3] appliquée au groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$, $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ agit transitivement sur l'ensemble des caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$, et comme cette action a pour noyau $\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ sont paramétrés par l'ensemble $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$. La proposition précédente permet donc de conclure. □

Précisons la bijection obtenue dans le corollaire 4.11:

On fixe un caractère régulier σ-stable χ_1 de U^F afin de bien définir ce paramétrage.

D'après le lemme 1.3 de [2], $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)((T^\sigma)^0)^F)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, donc les $((T^\sigma)^0)^F$-orbites des caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$. Comme $(T^\sigma)^0$ est connexe, l'application de Lang de $(T^\sigma)^0 \to (T^\sigma)^0$ est surjective. De plus, on a $Z((G^\sigma)^0) \subset (T^\sigma)^0$. Donc, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, il existe $t \in (T^\sigma)^0$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et z paramètre la $((T^\sigma)^0)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$.

5. Définition des représentations de Gelfand-Graev

5.1. Cas où σ est unipotent. — On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent. On rappelle que, lorsque σ est quasi-central unipotent, on a $(G^\sigma)^0 = G^\sigma$ et $(T^\sigma)^0 = T^\sigma$. Nous allons étendre toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F en une représentation de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$. Selon la proposition 5.1 ci-dessous, il suffit d'induire de $U^F.\langle\sigma\rangle$ à $\tilde{G}^F$ les caractères réguliers normalisés de $U^F.\langle\sigma\rangle$.

Proposition 5.1. — *Si σ est un automorphisme quasi-central unipotent rationnel de G, alors, tout caractère σ-stable de Gelfand-Graev de G^F est l'induit d'un caractère régulier σ-stable de U^F.*

Démonstration. — Les représentations de Gelfand-Graev de G comme les T^F-orbites de caractères réguliers de U^F sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G))$ (proposition 14.28 [3]) de la façon suivante: on fixe un caractère régulier de U^F que l'on note ϕ_1. Soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G))$, soit $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(Z(G))$ tel que la classe de F-conjugaison de $\mathcal{L}(t)$ dans $\mathrm{Z}(G)$ soit z. On note $\dot{z}$ l'image dans $\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G))/\mathrm{Z}(G)$ de t. Soit $\phi_{\dot{z}}$ le caractère régulier de U^F défini par $\phi_{\dot{z}} = {}^t\phi_1$, alors on définit Γ_z par $\Gamma_z = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi_{\dot{z}})$. On démontre que $\Gamma_z = \Gamma_{z'}$ si et seulement si $z = z'$.

Soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G))$ tel que Γ_z soit une représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F, soit $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G))$ défini comme ci-dessus. Soit $\phi = {}^t\phi_1$, alors, $\Gamma_z = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi)$ et ${}^\sigma\Gamma_z = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}({}^\sigma\phi)$. Par ailleurs, ${}^\sigma\phi$ est un caractère régulier de U^F. Donc, comme Γ_z est σ-stable, il existe $t' \in \mathcal{L}_T^{-1}(Z(G))$ tel que la classe de F-conjugaison de $\mathcal{L}(t')$ dans $\mathrm{Z}(G)$ soit z, c'est-à-dire celle de t, et tel que ${}^\sigma\phi = {}^{t'}\phi_1$. Ainsi, il existe $\tau \in \mathrm{Z}(G)$ tel que $\mathcal{L}(t') = \tau\mathcal{L}(t)F(\tau)^{-1}$, c'est-à-dire, tel que $F(t'(t\tau)^{-1}) = t(t'\tau)^{-1}$. Donc, il existe $\tau \in \mathrm{Z}(G)$ et $t_0 \in T^F$, tels que $t' = t_0 t\tau$. Ainsi, on a

$$ {}^\sigma\phi = {}^{t'}\phi_1 = {}^{t_0 t\tau}\phi_1 = {}^{t_0}\phi, $$

avec $t_0 \in T^F$. On a donc montré que la T^F-orbite de ϕ était σ-stable, il reste à prouver qu'elle contient un élément σ-stable.

Soit k l'ordre de σ, alors ${}^{\sigma^k}\phi = \phi$, c'est-à-dire, $\sigma^{k-1}(t_0)\ldots\sigma(t_0)t_0 \in \mathrm{Z}(G)$. Comme σ est unipotent quasi-semi-simple, alors, d'après le (iii) du théorème 2.3, $T = \mathcal{L}_\sigma(T) \times T^\sigma$, où, $\mathcal{L}_\sigma : t \to t^{-1}\sigma(t)$. Ainsi, on peut écrire $t_0 = t^{-1}\sigma(t)t_1$ avec $t^{-1}\sigma(t) \in T^F$ et $t_1 \in (T^\sigma)^F$. De plus, on peut choisir $t \in T^F$. En effet, $\mathcal{L}_\sigma(T^F)$ est inclus dans $\mathcal{L}_\sigma(T)^F$, or $|\mathcal{L}_\sigma(T^F)| = |T^F|/|(T^F)^\sigma|$ et $|\mathcal{L}_\sigma(T)^F| = |T^F|/|(T^\sigma)^F|$, d'où l'égalité $\mathcal{L}_\sigma(T^F) = \mathcal{L}_\sigma(T)^F$.

On a alors,

$$\sigma^{k-1}(t_0)\ldots\sigma(t_0)t_0 \in \mathrm{Z}(G) \Leftrightarrow \sigma^k(t)t^{-1}t_1^k \in \mathrm{Z}(G),$$

c'est-à-dire que $t_1^k \in \mathrm{Z}(G)$ car σ est d'ordre k. Ainsi pour toute racine $\alpha \in \Pi$, on a $\alpha(t_1^k) = \alpha(t_1)^k = 1$, or, $\alpha(t_1) \in \overline{\mathbb{F}}_q$ et k est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$ donc pour toute racine $\alpha \in \Pi$, $\alpha(t_1) = 1$, c'est-à-dire, $t_1 \in \mathrm{Z}(G)$ et $t_0 \in \mathcal{L}_\sigma(T) \times \mathrm{Z}(G)$.

Soit $\phi' = {}^{t^{-1}}\phi$, alors,

$$\sigma(\phi') = {}^{\sigma(t^{-1})t_0}\phi = {}^{\sigma(t^{-1})t^{-1}\sigma(t)t_1}\phi = {}^{t^{-1}}\phi = \phi'.$$

On a ainsi montré qu'il existait un caractère régulier ϕ' σ-stable de U^F tel que $\Gamma = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi')$. □

Définition 5.2. — Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, l'induit $\mathrm{Ind}_{U^F.\langle\sigma\rangle}^{G^F.\langle\sigma\rangle}(\tilde{{}^t\chi_1})$ (où on note $\tilde{{}^t\chi_1}$ l'extension normalisée de ${}^t\chi_1$ à $U^F.\langle\sigma\rangle$) ne dépend pas du choix de $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\tilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F.\langle\sigma\rangle}^{G^F.\langle\sigma\rangle}(\tilde{{}^t\chi_1})$. On définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G.\sigma}$ de $G^F.\sigma$ par $\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F.\sigma}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}})$.

5.2. Cas où σ est semi-simple. — On suppose que σ est rationnel quasi-central semi-simple. On suppose de plus que σ vérifie l'hypothèse (RS).

On voudrait que toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F soit étendue en au moins une représentation de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$. Selon la proposition 5.1, sous l'hypothèse σ unipotent quasi-central, toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F est l'induite d'un caractère régulier σ-stable de U^F. La proposition 5.1 n'est plus vraie lorsque l'on supprime l'hypothèse σ unipotent. On ne peut plus se contenter comme lorsque σ est unipotent quasi-central de définir les représentations de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$ comme les induites de $U^F.\langle\sigma\rangle$ à $\tilde{G}^F$ des extensions à $U^F.\langle\sigma\rangle$ des caractères réguliers σ-stables de U^F.

Par ailleurs, lorsque σ est semi-simple, G^σ et T^σ ne sont pas toujours connexes, donc, pour $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il n'existe plus forcément $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Cependant, T est connexe, donc l'application de Lang $\mathcal{L}_T : T \to T$ est surjective et comme $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset T$, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il existe $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Alors, ${}^t\sigma$ est un élément rationnel quasi-central de $\tilde{G}$, on a $\tilde{G}^F = G^F.\langle {}^t\sigma\rangle$ et $G^F.\sigma = G^F.{}^t\sigma$ et le caractère régulier ${}^t\chi_1$ est ${}^t\sigma$-stable. De plus, $\Gamma = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}\, {}^t\chi_1$ est une représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F.

Définition 5.3. — Soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Alors, $\mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1})$ (où on note $\tilde{{}^t\chi_1}$ l'extension normalisée de ${}^t\chi_1$ à $U^F.\langle {}^t\sigma\rangle$) ne dépend pas du choix de $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\tilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F.\langle {}^t\sigma\rangle}^{\tilde{G}^F}(\tilde{{}^t\chi_1})$. On définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G.\sigma}$ de $G^F.\sigma$ par $\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F.\sigma}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}})$.

6. Propriétés des représentations de Gelfand-Graev

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple.

Proposition 6.1. — *(i) La restriction à G^F d'une représentation de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F$ est une représentation de Gelfand-Graev de G^F.*

(ii) Les composantes irréductibles des représentations de Gelfand-Graev de $\tilde{G}^F = G^F.\langle\sigma\rangle$ sont toutes de multiplicité 1.

Démonstration. — Soit $z \in \mathrm{Z}(G^\sigma)$, alors, $\mathrm{Res}_{G^F}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}})$ est un caractère de Gelfand-Graev de G^F car si $t \in T$ est tel que $\mathcal{L}(t) \in z$ (on choisit $t \in T^\sigma$ si σ est unipotent) alors, $\mathrm{Res}_{G^F}^{\tilde{G}^F}(\Gamma_z^{\tilde{G}}) = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}({}^t\chi_1)$.

Or, ${}^t\chi_1$ est un caractère régulier de U^F et on retrouve bien un caractère de Gelfand-Graev de G^F. On peut décomposer $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ sous la forme $\Gamma_z^{\tilde{G}} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\tilde{G}^F)} c_\chi\chi$, alors, $\Gamma_z^{\tilde{G}}|_{G^F} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\tilde{G}^F)} c_\chi\chi|_{G^F}$. Par le théorème de Clifford, pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(\tilde{G}^F)$, on a $\chi|_{G^F} = e\sum_{i=1}^t \gamma_i$, où $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ sont les conjugués d'un même caractère irréductible γ de G^F dans $\tilde{G}^F$. Or, le fait que $\Gamma_z^{\tilde{G}}|_{G^F}$ soit une représentation de Gelfand-Graev de G^F entraîne que ses composantes irréductibles sont de multiplicité 1 ([3] théorème 14.30) et donc que pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(\tilde{G}^F)$, $c_\chi < 2$. Donc, les composantes irréductibles de $\Gamma_z^{\tilde{G}}$ sont de multiplicité 1. □

Soit L un sous-groupe de Levi rationnel et σ-stable contenant T d'un sous-groupe parabolique rationnel σ-stable P de G contenant B.

Lemme 6.2. — *L'inclusion $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset \mathrm{Z}(L^\sigma)$ induit une application surjective $h_{L^\sigma} : \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)) \to \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(L^\sigma))$.*

Démonstration. — Lorsque σ est unipotent, G^σ est un groupe réductif connexe et L^σ un sous-groupe de Levi de G^σ, le résultat provient alors du lemme 14.31 de [3].

Supposons maintenant que σ est semi-simple. Soit I le sous-ensemble de Π tel que L soit le sous-groupe de Levi standard L_I. Alors, I est σ-stable et

$$\mathrm{Z}(G^\sigma) = \cap_{\alpha\in\Pi}\mathrm{Ker}\alpha|_{T^\sigma} \subset \mathrm{Z}(L^\sigma) = \cap_{\alpha\in I}\mathrm{Ker}\alpha|_{T^\sigma}$$

En fait, on obtient la suite exacte suivante:

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Z}(G^\sigma)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Z}(L^\sigma)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma))$$

Donc, il suffit de montrer que $\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe.

Le groupe $\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est le centre de $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$, on va montrer que $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est un sous-groupe de Levi du groupe réductif connexe de centre trivial $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$. Cela nous permettra de conclure car, par le (ii) du lemme 13.14 de [3], si H est un groupe réductif connexe de centre connexe, alors, le centre de tout sous-groupe de Lévi de H est encore connexe.

Comme σ est quasi-central, et comme G est un groupe réductif connexe, on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0 \times \mathrm{Z}(G^\sigma)$ (théorème 2.3, (iii)), donc, $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est un groupe réductif connexe de centre trivial. Par ailleurs, si on pose $U_I = \langle U_\alpha; \alpha \in I\rangle$ et $U_I^- = \langle U_\alpha; (-\alpha) \in I\rangle$, alors, par les résultats généraux de la section 2, $L^\sigma = \langle T^\sigma, (U_I)^\sigma, (U_I^-)^\sigma\rangle$ et $(L^\sigma)^0 = \langle (T^\sigma)^0, (U_I)^\sigma, (U_I^-)^\sigma\rangle$ et comme $T^\sigma = (T^\sigma)^0 \times \mathrm{Z}(G^\sigma)$, le groupe $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe, et c'est un sous-groupe de Levi de $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$. □

On définit les représentations de Gelfand-Graev de $L^F.\sigma$ comme celles de $G^F.\sigma$ dans la section 5. On pose $\phi_1 = \mathrm{Res}^{U^F}_{U^F\cap L^F}(\chi_1)$ et on définit pour tout $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$, le caractère ${}^t\tilde{\phi}_1$ de $\mathrm{Irr}((L^F \cap U^F).\langle {}^t\sigma\rangle)$ comme l'extension normalisée de ${}^t\phi_1$ à $(U^F \cap L^F).\langle {}^t\sigma\rangle$.

Remarque 6.3. — On a $(\tilde{{}^t\chi_1})|_{(L^F\cap U^F).{}^t\sigma} = (\tilde{{}^t\phi_1})$.

Proposition 6.4. — *Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, on a: ${}^*\mathrm{R}^{G.\sigma}_{L.\sigma}(\Gamma^{G.\sigma}_z) = \Gamma^{L.\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)}$, où ${}^*\mathrm{R}^{G.\sigma}_{L.\sigma}$ désigne la restriction de Harish-Chandra généralisée aux groupes non connexes comme dans* [4].

Démonstration. — La propriété de l'énoncé est équivalente à: Pour toute fonction de σ-classe f de $L^F.\sigma$, on a:

$$\langle R^{G.\sigma}_{L.\sigma}(f), \Gamma^{G.\sigma}_z\rangle_{G^F.\sigma} = \langle f, \Gamma^{L.\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)}\rangle_{L^F.\sigma}.$$

Soit $t \in T$ tel que $\mathcal{L}_T(t) \in z$ (si c'est possible, ce qui est toujours le cas lorsque σ est unipotent, on choisit t dans T^σ, on a alors ${}^t\sigma = \sigma$). Alors,

$$\begin{aligned}\langle f, \Gamma^{L.\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)}\rangle_{L^F.\sigma} &= \langle f, \mathrm{Ind}^{L^F.{}^t\sigma}_{(L^F\cap U^F).{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\phi_1})\rangle_{L^F.\sigma}\\ &= \langle \mathrm{Res}^{L^F.{}^t\sigma}_{(L^F\cap U^F).{}^t\sigma}(f), (\tilde{{}^t\phi_1})\rangle_{(L^F\cap U^F).{}^t\sigma}\end{aligned}$$

Donc, la propriété de l'énoncé est équivalente à: Pour toute fonction de σ-classe de $L^F.\sigma$:

$$(1) \qquad \langle R^{G.\sigma}_{L.\sigma}(f), \Gamma^{G.\sigma}_z\rangle_{G^F.\sigma} = \langle f, (\tilde{{}^t\phi_1})\rangle_{(L^F\cap U^F).{}^t\sigma}$$

On définit la fonction $\tilde{f}$ sur $P^F.\sigma$ par $f \times Id$ dans la décomposition $P^F.\sigma = (L^F.\sigma)V^F$, où V est le radical unipotent de P. Alors, on a aussi $\tilde{f} = f \times Id$ dans la décomposition $P^F.{}^t\sigma = (L^F.{}^t\sigma)V^F$.

Lemme 6.5. — *On a* $R_{L.\sigma}^{G.\sigma}(f) = \mathrm{Ind}_{P^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{f})$.

Démonstration. — Soit $g \in G^F$, alors,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{P^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{f})(g.\sigma)\\
&= 1/|P^F| \sum_{\{x \in G^F \mid (xt\sigma(t^{-1}).\sigma)g.\sigma(xt\sigma(t^{-1}).\sigma)^{-1} \in P^F.{}^t\sigma\}} \tilde{f}((xt\sigma(t^{-1}).\sigma)g.\sigma(xt\sigma(t^{-1}).\sigma)^{-1})\\
&= 1/|P^F| \sum_{\{y \in G^F \mid y.\sigma g.\sigma(y.\sigma)^{-1} \in P^F.\sigma\}} \tilde{f}(y.\sigma g.\sigma(y.\sigma)^{-1})\\
&\quad (\text{car } t^{-1}\sigma(t) \in T^F \text{ et } P^F.{}^t\sigma = P^F.\sigma)\\
&= \mathrm{Ind}_{P^F.\sigma}^{G^F.\sigma}(\tilde{f})(g.\sigma)\\
&\quad (\text{induction de Harish-Chandra})\\
&= R_{L.\sigma}^{G.\sigma}(f)(g.\sigma)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 6.5. □

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité (1) est égal à

$$\langle \mathrm{Ind}_{P^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{f}), \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{G^F.{}^t\sigma},$$

c'est-à-dire par la formule de Mackey pour les fonctions de ${}^t\sigma$-classes, à

$$\sum_{g \in (P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}} \langle \tilde{f}, \mathrm{Ind}_{(P^F \cap {}^g(U^F)).{}^t\sigma}^{P^F.{}^t\sigma} \circ \mathrm{Res}_{(P^F \cap {}^g(U^F)).{}^t\sigma}^{{}^g(U^F).{}^t\sigma} {}^g(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{P^F.{}^t\sigma}$$

$$= \sum_{g \in (P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}} \langle \tilde{f}, {}^g(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{P^F.{}^t\sigma \cap\, {}^g(U^F).{}^t\sigma}.$$

Si L est le sous-groupe de Levi standard L_I, alors, $P \backslash G / U$ est en bijection avec l'ensemble des éléments I-réduits de $W = W(T)$ ([3] lemme 5.5). Donc, l'ensemble $(P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}$ est en bijection avec l'ensemble des éléments I-réduits ${}^t\sigma$-stables de W^F, par ailleurs, comme ${}^t\sigma$ est quasi-central, tout élément ${}^t\sigma$-stable de $W^F = \mathrm{N}_G(T)^F / T^F$ a un représentant ${}^t\sigma$-stable dans $\mathrm{N}_G(T)^F$. Ainsi, $(P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}$ est en bijection avec un ensemble de représentants ${}^t\sigma$-stables dans $\mathrm{N}_G(T)^F$ des éléments I-réduits ${}^t\sigma$-stables de W^F. Soit n un tel élément qui relève $w \in W^F$, alors, on a:

$$P^F.{}^t\sigma \cap {}^nU^F.{}^t\sigma = ((L^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma).(V^F \cap {}^nU^F),$$

et la restriction de $\tilde{f}$ à $(P^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma$ est égale à $\mathrm{Res}^{L^F.{}^t\sigma}_{(L^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma}(f) \times \mathrm{Id}$ dans cette décomposition. Donc on a:

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{f}, {}^n(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{(P^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma}\\ &= \langle \mathrm{Res}^{L^F.{}^t\sigma}_{(L^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma}(f), {}^n(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{L^F.{}^t\sigma \cap {}^nU^F.{}^t\sigma} \langle \mathrm{Id}, {}^t\chi_1\rangle_{{}^{n^{-1}}V^F \cap U^F}.\end{aligned}$$

Comme ${}^t\chi_1$ est un caractère régulier ${}^t\sigma$-stable de U^F, $\langle \mathrm{Id}, {}^t\chi_1\rangle_{{}^{n^{-1}}V^F \cap U^F}$ est non nul et égal à 1 si et seulement si ${}^{n^{-1}}V \cap U$ ne contient aucun U_α pour $\alpha \in \Pi$.

Lemme 6.6. — *${}^{n^{-1}}V \cap U$ ne contient aucun U_α tel que α soit une racine simple si et seulement si $w = w_0^I w_0$ où w_0^I est l'élément de plus grande longueur de W_I et w_0 l'élément de plus grande longueur de W.*

Démonstration. — On a $U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$ et $V = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \langle I\rangle^+\}} U_\alpha = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ \cap {}^{w_0^I}\Phi^+\}} U_\alpha$, où w_0^I est le plus grand élément de W_I. Donc,

$${}^{n^{-1}}V \cap U = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ \cap {}^{w^{-1}}\Phi^+ \cap {}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+\}} U_\alpha$$

Or w est I-réduit, donc, $l(w(w_0^I)^{-1}) = l(w) + l((w_0^I)^{-1})$ et

$$\Phi^+ \cap {}^{w^{-1}}\Phi^+ \cap {}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+ = \Phi^+ \cap {}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+.$$

Ce qui entraîne que ${}^{n^{-1}}V \cap U = {}^{n^{-1}n_0^I}V \cap U$, où, n_0^I est un représentant σ-stable de w_0^I dans $\mathrm{N}_G(T)^F$ et ce groupe ne contient aucun U_α où $\alpha \in \Pi$ si et seulement si $(w_0^I)^{-1}w$ envoie toute racine simple positive sur une racine négative, c'est-à-dire si et seulement si $(w_0^I)^{-1}w = w_0$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W. Donc, $\langle \mathrm{Id}, \tilde{\chi}_{S(z)}\rangle_{{}^{n^{-1}}V^F \cap U^F}$ est non nul et égal à 1 si et seulement si $w = w_0^I w_0$. D'où le lemme 6.6. □

En tenant compte du lemme ci-dessus, du fait que w_0 envoie les racines positives sur l'ensemble des racines négatives, du fait que w_0^I change le signe des racines qui sont dans le système de racines de L et seulement le leur et du fait que w_0 et w_0^I sont ${}^t\sigma$-stables (car W et W_I le sont), on a $L \cap {}^nU = L \cap U$. Ainsi,

$$\langle R^{G.\sigma}_{L.\sigma}(f), \Gamma^{G.\sigma}_z\rangle_{G^F.\sigma} = \langle \mathrm{Res}^{L^F.{}^t\sigma}_{L^F \cap U^F.{}^t\sigma}(f), {}^n(\tilde{{}^t\chi_1})\rangle_{(L^F \cap U^F).{}^t\sigma}.$$

Par la remarque 6.3, on obtient alors:

$$\langle R^{G.\sigma}_{L.\sigma}(f), \Gamma^{G.\sigma}_z\rangle_{G^F.\sigma} = \langle f, {}^n({}^t\tilde{\phi}_1)\rangle_{(L^F \cap U^F).{}^t\sigma}.$$

De plus, si on pose $n = t'w$ avec $t' \in T^F$, alors n agit par conjugaison sur $L^F \cap U^F$ de la même façon que t' et les caractères ${}^n({}^t\tilde{\phi}_1)$ et $({}^t\tilde{\phi}_1)$ sont dans la même $(T^\sigma)^F$-orbite: on en déduit la proposition 6.4. □

7. Relation avec les éléments réguliers

On considère la définition suivante de la dualité introduite par [4] pour les groupes réductifs non connexes:

DÉFINITION 7.1. — Soit (T, B) un couple formé d'un tore maximal de G et d'un sous-groupe de Borel le contenant, tous deux rationnels et σ-stables. Alors, le Frobenius agit sur le système de racines de G par rapport à T, on note τ cette action, alors, τ préserve la base Π du système de racines de G par rapport à $T \subset B$. De plus, on a la formule suivante:

$$\mathrm{D}_{G.\sigma} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|} \mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma} \circ {}^*\mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma},$$

où Π/τ est l'ensemble des orbites de τ dans la base Π et où $\mathcal{P}(\Pi/\tau)$ est l'ensemble des parties de Π/τ.

PROPOSITION 7.2. —

(i) Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F.\sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple).

(ii) Dans les deux cas, on a $\langle \Gamma_z^{G.\sigma}, (-1)^{|\Pi/\tau \times \sigma|} \mathrm{D}_{G.\sigma} \Gamma_{z'}^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma} = |\mathrm{Z}((G^\sigma)^F)| \delta_{z,z'}$.

Démonstration. — (i) En utilisant la proposition 6.4, on obtient:

$$\mathrm{D}_{G.\sigma} \Gamma_z^{G.\sigma} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|} \mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma} (\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I.\sigma}).$$

Comme $\mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma}$ est une induction de Harish-Chandra, si P_I est le sous-groupe parabolique rationnel σ-stable de G contenant L_I et de radical unipotent V_I, en utilisant le lemme 6.5 et la remarque 6.3, on obtient:

$$\mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma}(\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I.\sigma}) = \mathrm{Ind}_{(P_I)^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}[\mathrm{Ind}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{(L_I)^F.{}^t\sigma}(\mathrm{Res}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{U^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)) \times \mathrm{Id}_{V_I^F}],$$

où on a choisi $t \in T$ ($t \in T^\sigma$ quand c'est possible et en particulier quand σ est unipotent) tel que $\mathcal{L}(t) \in z$. Cependant le calcul montre que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{(L_I)^F.{}^t\sigma}(\mathrm{Res}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{U^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)) \times \mathrm{Id}_{V_I^F} \\ &= \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{(P_I)^F.{}^t\sigma}(\mathrm{Res}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{U^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1) \times \mathrm{Id}_{V_I^F}). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par la transitivité de l'induction:

$$\mathrm{R}_{L_I.\sigma}^{G.\sigma}(\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I.\sigma}) = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\mathrm{Res}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{U^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1) \times \mathrm{Id}_{V_I^F}).$$

Donc, $\mathrm{D}_{G.\sigma} \Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma} \sum_{I \in \mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|} (\mathrm{Res}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}^{U^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1) \times \mathrm{Id}_{V_I^F})$.

On veut montrer que $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}(g.\sigma)$ est nul si $g.\sigma$ n'est pas régulier unipotent rationnel quand σ est unipotent et si $g.\sigma$ n'est pas régulier pseudo-unipotent rationnel quand σ est semi-simple. En fait, il suffit de prouver que :

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}(\mathrm{Res}^{U^F.{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F).{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}) \times \mathrm{Id}_{V_I^F})$$

est nul en dehors des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $U^F.{}^t\sigma$. Soit $u.{}^t\sigma$ un élément de $U^F.{}^t\sigma$ et soit $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} u_\mathcal{O}$ la projection de u sur $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} U_\mathcal{O}$. On pose

$$\chi_\mathcal{O} = {}^t\chi_1|_{U_\mathcal{O}^F}.$$

On a alors,

$$(\tilde{{}^t\chi_1})(u.{}^t\sigma) = \prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} \chi_\mathcal{O}(u_\mathcal{O}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}(\mathrm{Res}^{U^F.{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F).{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}) \times \mathrm{Id}_{V_I^F})(u.{}^t\sigma)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|} \prod_{\mathcal{O}\in I} \chi_\mathcal{O}(u_\mathcal{O})\end{aligned}$$

On note à nouveau $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_s\}$, les représentants des σ-orbites de Π/τ.

Remarque 7.3. — Dans le cas où t n'est pas σ-stable, les automorphismes σ et ${}^t\sigma$ agissent de la même façon sur les racines.

Donc $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_s\}$ est aussi un ensemble de représentants des ${}^t\sigma$-orbites de Π/τ. Pour tout $k\in\{1,\ldots,s\}$, on note $o(k)$, l'ordre de $\mathcal{O}_k$ sous l'action de ${}^t\sigma$. On a:

$$\begin{aligned}&\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}(\mathrm{Res}^{U^F.{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F).{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}) \times \mathrm{Id}_{V_I^F})(u.{}^t\sigma)\\ &= \prod_{k=1}^{s}(1 - \prod_{l=0}^{o(k)-1} \chi_{{}^t\sigma^l(\mathcal{O}_k)}(u_{{}^t\sigma^l(\mathcal{O}_k)})).\end{aligned}$$

Le (i) de la proposition 7.2 se déduit donc de la proposition suivante.

Proposition 7.4. — *Soit σ' un automorphisme quasi-central rationnel unipotent ou semi-simple de G. Soit $u=\prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(k_\alpha)$ un élément de U^F, et soit χ un caractère régulier σ'-stable de U^F, alors, si $u.\sigma'$ n'est pas régulier, il existe une racine α de Π telle que*

$$\chi(\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}(k_{\sigma'^i(\alpha)})) = 1$$

(où o est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α et où l'isomorphisme $\lambda \mapsto u_{\sigma'^i(\alpha)}$ est défini par la notation 4.2).

Démonstration. — 1) Cas où σ' est unipotent.

Supposons $u.\sigma'$ non régulier. Alors, par le théorème 3.4, il existe $\alpha \in \Pi$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{\sigma'^i(\alpha)} \dots c_{\sigma'^{n-1}(\alpha)} k_{\sigma'^i(\alpha)} = 0,$$

où n est l'ordre de α sous l'action de σ'. On note $\mathcal{A}$ la σ'-orbite de α, soit a l'ordre de $\mathcal{A}$ sous l'action de τ. On note $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α et o l'ordre de $\mathcal{O}$ sous l'action de σ'.

Pour toute racine $\beta \in \Phi^+$, on a $k_{\tau(\beta)} = k_\beta^q$ car u est rationnel, et $c_{\tau(\beta)} = c_\beta^q$ par le lemme 4.4. Donc, pour tout $l \in \{1, \dots, a-1\}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{\sigma'^i(\tau^l(\alpha))} \dots c_{\sigma'^{n-1}(\tau^l(\alpha))} k_{\sigma'^i(\tau^l(\alpha))} = (\sum_{i=0}^{n-1} c_{\sigma'^i(\alpha)} \dots c_{\sigma'^{n-1}(\alpha)} k_{\sigma'^i(\alpha)})^{q^l} = 0$$

On rappelle que $\mathcal{A} \cup \dots \cup \tau^{a-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \cup \dots \cup \sigma'^{o-1}(\mathcal{O})$ (lemme 4.6). Ainsi, on peut trouver $u_0 = \prod_{\beta \in \Phi^+} x_\beta(l_\beta) \in U^F$ tel que $l_\beta = 0$ pour tout $\beta \in \cup_{l=0}^{a-1} \tau^l(\mathcal{A})$ et $v \in U$ tels que $u = vu_0\sigma'(v)^{-1}$.

Pour toute τ-orbite Ω de Π on note u_Ω et v_Ω les projections respectives de u et v sur $\prod_{\beta \in \Omega} U_\beta$, alors, on a

$$\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\mathcal{O})} = \prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})} \prod_{i=0}^{o-1} \sigma'(v_{\sigma'^i(\mathcal{O})})^{-1} \text{dans U/U}^*.$$

LEMME 7.5. — *Si pour $\tilde{u} \in (U_\mathcal{O} \times \dots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^F$ il existe $\tilde{v} \in U_\mathcal{O} \times \dots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})}$ tel que $\tilde{u} = \tilde{v}\sigma'(\tilde{v})^{-1}$, alors, il existe $\tilde{w} \in (U_\mathcal{O} \times \dots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^F$ tel que $\tilde{u} = \tilde{w}\sigma'(\tilde{w})^{-1}$.*

Démonstration. — On pose $\tilde{U} = U_\mathcal{O} \times \dots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})}$. On note $\mathcal{U} = \{\tilde{w}\sigma(\tilde{w})^{-1}; \tilde{w} \in \tilde{U}\}$, alors, $\mathcal{U}$ est l'orbite de 1 par σ'-conjugaison dans $\tilde{U}$.

Selon Digne et Michel ([3] proposition 3.21),

(i) $\tilde{w}\sigma'(\tilde{w})^{-1}$ est rationnel si et seulement si $\tilde{w}^{-1}F(\tilde{w})$ appartient au stabilisateur de 1 dans $\tilde{U}$ sous l'action de σ'-conjugaison, c'est-à-dire à $\tilde{U}^{\sigma'}$.

(ii) Les $\tilde{U}^F$-orbites de σ'-conjugaison de $\mathcal{U}^F$ sont paramétrées par les classes de F-conjugaison de $\tilde{U}^{\sigma'}$.

Cependant, $\tilde{U}^{\sigma'}$ est un groupe abélien connexe donc $\mathrm{H}^1(F, \tilde{U}^{\sigma'}) = 1$, ce qui permet de conclure qu'il n'y a qu'une $\tilde{U}^F$-orbite de σ'-conjugaison dans $\mathcal{U}^F$. Ceci prouve le lemme 7.5. □

On a montré que si $u.\sigma'$ est unipotent rationnel non régulier, il existe une τ-orbite $\mathcal{O}$ de Π telle que si o est l'ordre de $\mathcal{O}$ sous l'action de σ', alors, on peut écrire

$$u_{\mathcal{O}} \ldots u_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})} = v_{\mathcal{O}} \ldots v_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})}\sigma'(v_{\mathcal{O}} \ldots v_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^{-1},$$

où tous les facteurs du produit de droite sont rationnels.

On a alors,

$$\begin{aligned}\chi(\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}(k_{\sigma'^i(\alpha)})) &= \chi(\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\mathcal{O})}) \\ &= \chi(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\sigma(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})})^{-1}) \\ &= \chi(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})})\chi(\sigma(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}))^{-1} \\ &= \chi(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})})\chi(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})})^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition 7.4 lorsque σ' est unipotent.

2) Cas où σ' est semi-simple:

Soit us la décomposition de Jordan de $g.\sigma'$, alors, u et s sont rationnels, la partie unipotente u est dans U^F et s est un élément semi-simple rationnel de $U.\sigma'$. Donc, d'après le lemme 3.13, on a $s \in \mathrm{Cl}_U(\sigma')^F$, c'est-à-dire $s \in \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma')$, car $U^{\sigma'}$ est connexe. Ainsi, il existe $v \in U^F$ tel que $s = {}^v\sigma'$ et $g = vu'\sigma'(v)^{-1}$, où on a posé $u' = {}^{v^{-1}}u \in (U^{\sigma'})^F$.

Si on pose $u' = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(l_\alpha)$, alors, comme χ est σ'-stable, pour toute racine simple α, on a

$$\chi(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}(k_{\sigma'^i(\alpha)})) = \chi(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}(l_{\sigma'^i(\alpha)})),$$

où $o(\alpha)$ est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α.

De plus, si $g.\sigma'$ n'est pas régulier dans $G.\sigma'$ alors u' ne l'est pas dans $(G^{\sigma'})^0$, donc il existe une σ'-orbite $\mathcal{A}$ de Π telle que pour toute racine $\alpha \in \mathcal{A}$ on ait $l_\alpha = 0$. On choisit $\alpha \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, o(\alpha)-1\}$, où $o(\alpha)$ est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α, on a $u_{\sigma'^i(\alpha)}(l_{\sigma'^i(\alpha)}) = 1$, d'où,

$$\chi(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}(l_{\sigma'^i(\alpha)})) = 1.$$

Ceci termine les démonstrations de la proposition 7.4 et du (i) de la proposition 7.2. □

Nous allons maintenant prouver le (ii) de la proposition 7.2. Soient z et z' deux F-classes de $\mathrm{Z}(G^\sigma)$. Soient t et t' dans T tels que $\mathcal{L}(t) \in z$ et $\mathcal{L}(t') \in z'$ (quand c'est possible, on choisit t et t' dans T^σ). On pose

$$\phi_{z'} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|} (\mathrm{Res}^{U^F.{}^{t'}\sigma}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^{t'}\sigma} (\tilde{{}^{t'}\chi_1}) \times \mathrm{Id}_{V_I^F}).$$

On a alors,

$$\mathrm{D}_{G.\sigma} \Gamma^{G.\sigma}_{z'} = \mathrm{Ind}^{G^F.{}^{t'}\sigma}_{U^F.{}^{t'}\sigma} \phi_{z'}.$$

Calculons le produit scalaire suivant:

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma^{G.\sigma}_z, \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma^{G.\sigma}_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} &= \langle \mathrm{Ind}^{G^F.{}^t\sigma}_{U^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}), \mathrm{Ind}^{G^F.{}^{t'}\sigma}_{U^F.{}^{t'}\sigma}(\phi_{z'}) \rangle_{G^F.\sigma} \\
&= \langle \mathrm{Res}^{G^F.{}^{t'}\sigma}_{U^F.{}^{t'}\sigma} \mathrm{Ind}^{G^F.{}^t\sigma}_{U^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}), \phi_{z'} \rangle_{U^F.{}^{t'}\sigma}
\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord qu'il existe $t'' \in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t'') \in z^{-1}z'$ (c'est toujours vrai lorsque σ est unipotent). Alors on peut supposer qu'on a choisi $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(z)$ et $t' \in \mathcal{L}_T^{-1}(z')$ tels que $t^{-1}t' \in T^\sigma$. On a alors ${}^{t'}\sigma = {}^t\sigma$, d'où,

$$\langle \Gamma^{G.\sigma}_z, \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma^{G.\sigma}_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} = \langle \mathrm{Res}^{G^F.{}^t\sigma}_{U^F.{}^t\sigma} \mathrm{Ind}^{G^F.{}^t\sigma}_{U^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}), \phi_{z'} \rangle_{U^F.{}^t\sigma}.$$

Par la formule de Mackey pour les fonctions de ${}^t\sigma$-classes et en utilisant la bijection entre $U^F \backslash G^F / U^F$ et $\mathrm{N}_G(T)^F$ on obtient:

$$\langle \Gamma^{G.\sigma}_z, \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma^{G.\sigma}_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} = \sum_{n \in (\mathrm{N}_G(T)^F)^{{}^t\sigma}} \langle {}^n(\tilde{{}^t\chi_1}), \phi_{z'} \rangle_{(U^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma}.$$

Lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), le fait qu'un élément régulier unipotent (resp. pseudo-unipotent) ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel (propositions 3.3 et 3.16) et le fait que n soit ${}^t\sigma$-stable entraînent que $(U^F \cap {}^nU^F).{}^t\sigma$ ne contient pas d'éléments réguliers si n n'est pas dans $(T^{{}^t\sigma})^F$.

Par ailleurs, $\langle (\tilde{{}^t\chi_1}), \mathrm{Res}^{U^F.{}^t\sigma}_{(U^F \cap (L_I)^F).{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1}) \times \mathrm{Id}_{V_I^F}) \rangle_{U^F.{}^t\sigma}$ est nul si $I \neq \Pi/\tau$ (car $\langle (\tilde{{}^t\chi_1}), \mathrm{Id}_{V_I^F} \rangle_{V_I^F}$ est nul si $V_I^F \neq \{1\}$). Donc, on a:

$$\langle \Gamma^{G.\sigma}_z, \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma^{G.\sigma}_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} = (-1)^{|\Pi/\tau \times \sigma|} \sum_{t'' \in (T^{{}^t\sigma})^F} \langle {}^{t''t}\chi_1, {}^{t'}\chi_1 \rangle_{U^F}$$

Cependant, comme $t^{-1}t'$ est σ-stable, les caractères ${}^{t''t}\chi_1$ et ${}^{t'}\chi_1$ ne peuvent être égaux que si $t^{-1}t' \in (T^\sigma)^F$ (c'est-à-dire si $z = z'$), et si $t'' \in t^{-1}t'\mathrm{Z}(G^\sigma)^F$.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de t'' dans T^σ tel que $\mathcal{L}(t'') \in z^{-1}z'$. Soient t et t' respectivement dans $\mathcal{L}_T^{-1}(z)$ et dans $\mathcal{L}_T^{-1}(z')$.

Lemme 7.6. — *Sous l'hypothèse précédente, pour tout $u \in U^F$ tel que $u.{}^{t'}\sigma$ soit régulier, on a* $\mathrm{Ind}^{G^F.{}^t\sigma}_{U^F.{}^t\sigma}(\tilde{{}^t\chi_1})(u.{}^{t'}\sigma) = 0$.

Démonstration. —

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)(u.{}^{t'}\sigma)\\
&= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F|(x.{}^t\sigma)(u.{}^{t'}\sigma)(x.{}^t\sigma)^{-1}\in U^F.{}^t\sigma\}} ({}^t\tilde{\chi}_1)((x.{}^t\sigma)(u.{}^{t'}\sigma)(x.{}^t\sigma)^{-1})\\
&= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F|x({}^t\sigma)ut_0\sigma(t_0)^{-1}x^{-1}\in U^F.{}^t\sigma\}} ({}^t\tilde{\chi}_1)(x({}^t\sigma)ut_0\sigma(t_0)^{-1}x^{-1})\\
&= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F|(x\sigma(t_0))\,{}^t\sigma({}^{t_0^{-1}}u)\,{}^t\sigma(x\sigma(t_0))^{-1}\in U^F\}} ({}^t\tilde{\chi}_1)((x\sigma(t_0))\,{}^t\sigma({}^{t_0^{-1}}u.{}^t\sigma)(x\sigma(t_0))^{-1})\\
&= 1/|U^F| \sum_{\{y\in G^F|(yt_0)({}^{t_0^{-1}}u.{}^t\sigma)(yt_0)^{-1}\in U^F.{}^t\sigma\}} ({}^t\tilde{\chi}_1)((yt_0)(({}^{t_0^{-1}}u).{}^t\sigma)(yt_0)^{-1})
\end{aligned}
$$

On considère l'ensemble suivant:

$$\mathcal{E} = \{y \in G^F|(yt_0)(({}^{t_0^{-1}}u).{}^t\sigma)(yt_0)^{-1} \in U^F.{}^t\sigma\}.$$

Pour montrer que $\mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)(u.{}^{t'}\sigma) = 0$, il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ est vide. Le fait que $u.{}^{t'}\sigma$ soit régulier entraîne que ${}^{t_0^{-1}}u.{}^t\sigma$ est régulier aussi. Soit $y \in \mathcal{E}$, alors ${}^{yt_0}({}^{t_0^{-1}}u.{}^t\sigma) \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$, donc, ${}^{t_0^{-1}}u.{}^t\sigma \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}({}^{t_0^{-1}y^{-1}}B)$, ce qui entraîne que $yt_0 \in B$, car $({}^{t_0^{-1}}u).{}^t\sigma$ est régulier et donc d'après les propositions 3.3 et 3.16, ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel de G. On pose $y = vt_1$ avec $v \in U$ et $t_1 \in T$, alors, il existe $t_2 \in T^\sigma$ tel que $t_1 = t_2t_0$ et $t_1 \in T^F$. Ainsi, $t_2F(t_2)^{-1} = t_0^{-1}F(t_0) \in z^{-1}z'$, donc $z^{-1}z' \cap \mathcal{L}_{T^\sigma}(T^\sigma)$ n'est pas vide ce qui contredit l'hypothèse faite sur $z^{-1}z'$. Donc $\mathcal{E}$ est vide et on obtient le résultat du lemme 7.6. □

D'après le lemme précédent, on a $\mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)(u.{}^{t'}\sigma) = 0$ pour tout $u \in U^F$ tel que $u.{}^{t'}\sigma$ soit régulier, et d'après la démonstration du (i), $\phi_{z'}(u.{}^{t'}\sigma) = 0$ pour tout $u \in U^F$ tel que $u.{}^{t'}\sigma$ ne soit pas régulier. Donc, lorsqu'il n'existe pas de $t'' \in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t'') \in z^{-1}z'$, on a bien $\langle \Gamma_z^{G.\sigma}, \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}\rangle_{G^F.\sigma} = 0$, ce qui termine la preuve de la proposition 7.2. □

8. Valeurs des fonctions de σ-classes sur les éléments réguliers unipotents ou pseudo-unipotents

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple. On choisit $u_0 \in U^F$ tel que $u_0.\sigma$ soit régulier. Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des éléments z de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$ tels qu'il existe $t \in T^\sigma$ pour lequel $t^{-1}F(t) \in z$. Si σ est unipotent, on a $\mathcal{Z} = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, soit $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. On définit l'ensemble $\mathcal{U}_z = \{x.\sigma \in G^F.\sigma | x.\sigma \sim_{G^F} {}^t(u_0U^*.\sigma)\}$, définition qui est indépendante du choix de t.

PROPOSITION 8.1. — *(i) Les ensembles $\mathcal{U}_z$ sont disjoints.*

(ii) La réunion des $\mathcal{U}_z$ est l'ensemble des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $G^F.\sigma$ lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple).

(iii) Si σ est semi-simple et si la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, alors chaque $\mathcal{U}_z$ est une classe de conjugaison sous G^F.

Démonstration. — (i) Soient z et z' dans $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ et soit $t\in T$ tel que $\mathcal{L}(t)$ soit un représentant de z. Alors, on a $t\mathcal{U}_{z'}t^{-1}=\mathcal{U}_{zz'}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$, $\mathcal{U}_z\cap\mathcal{U}_1$ est vide.

Soit $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que $\mathcal{U}_z\cap\mathcal{U}_1$ soit non vide. Soient $t\in\mathcal{L}_T^{-1}(z)$, $x\in G^F$ et $u^*,\ v^*\in((U^\sigma)^*)^F$ tels que:

$$\text{(2)}\qquad {}^{t}(u_0u^*.\sigma)={}^{x}(u_0v^*.\sigma)$$

Comme $u_0u^*.\sigma$ et $u_0v^*.\sigma$ sont réguliers, ils ne normalisent qu'un seul sous-groupe de Borel qui est B (propositions 3.3 et 3.16), donc ${}^{t}(u_0u^*.\sigma)$ et ${}^{x}(u_0v^*.\sigma)$ normalisent le même sous-groupe de Borel qui est encore B, ce qui entraîne que $x\in B^F$. On a donc $x=su_x$ avec $s\in T^F$ et $u_x\in U^F$. L'équation (2) entraîne que ${}^{t^{-1}s}(u_0u^*.\sigma)\in U^F.\sigma$, donc que $(t^{-1}s)^{-1}\sigma(t^{-1}s)=1$, donc l'existence de $t_0\in T^\sigma$ tel que $s=tt_0$. Ainsi, $t_0F(t_0)^{-1}=t^{-1}F(t)\in z$ et comme $t_0\in T^\sigma$, on a $z\in\mathcal{Z}$. Donc on peut supposer que $t\in T^\sigma$, s est aussi σ-stable. Donc d'après (2), on obtient ${}^{s^{-1}t}u_0u_1^*=u_xu_0\sigma(u_x)^{-1}u_2^*$ avec $u_i^*\in U^*$. On note $\tilde{B}=B/U^*$. Si on note respectivement $\tilde{u}_x$ et $\tilde{u}_0$ les projections de u_x et u_0 dans $\tilde{B}$ alors, on obtient $(\tilde{u}_xst^{-1})\tilde{u}_0\sigma(\tilde{u}_xst^{-1})^{-1}=\tilde{u}_0$ dans $\tilde{B}$. Ce qui entraîne que $st^{-1}\in\mathrm{Z}(G^\sigma)$: c'est clair d'après le lemme 3.11 lorsque σ est unipotent, c'est encore vrai lorsque σ est semi-simple car dans ce cas $u_0.\sigma$ est une décomposition de Jordan et u_0 est régulier dans $(G^\sigma)^0$ ce qui entraîne que $\mathrm{C}_G(u_0.\sigma)=\mathrm{Z}(G^\sigma)\times\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. Donc il existe $\tau\in\mathrm{Z}(G^\sigma)$ tel que $\tau^{-1}F(\tau)=t^{-1}F(t)\in z$ et on a $z=1$.

(ii) Cas unipotent: Soit $x.\sigma$ un élément unipotent régulier rationnel, alors $x.\sigma$ normalise un unique sous-groupe de Borel B'. Par ailleurs, ${}^{x.\sigma}F(B')=F({}^{x.\sigma}B')=F(B')$, donc, $x.\sigma$ normalise $F(B')$, ce qui signifie que B' est rationnel. Ainsi, il existe $g\in G^F$ tel que $B'={}^{g}B$ et $g^{-1}x\sigma(g).\sigma=b.\sigma$ est un élément unipotent régulier de $B.\sigma$.

Or, d'après le lemme 3.5, $b.\sigma$ est régulier si et seulement si son image $\tilde{b}$ par la projection $B\to\tilde{B}$ est σ-conjugué sous $\tilde{B}$ à $\tilde{u}_0$. On note $\mathcal{U}$ la classe de σ-conjugaison de $\tilde{u}_0$ sous $\tilde{B}$. Les classes de σ-conjugaison de $\mathcal{U}^F$ dans $\tilde{B}^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$. Donc, si $\tilde{b}\in\mathcal{U}^F$, il existe $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ et $t\in\mathcal{L}_{T^\sigma}^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$, un représentant de z, tels que $\tilde{b}$ soit dans la classe de σ-conjugaison sous $\tilde{B}^F$ de ${}^{t}\tilde{u}_0$. Soit $\tilde{w}\in\tilde{B}^F$ tel que $\tilde{b}=\tilde{w}{}^{t}\tilde{u}_0\sigma(\tilde{w})^{-1}$. Soit $w\in B^F$ qui ait pour image $\tilde{w}$ dans $\tilde{B}^F$. Alors, il existe $u^*\in(U^*)^F$ tel que $b=w{}^{t}(u_0u^*)\sigma(w)^{-1}$. Donc, $b.\sigma$ et par conséquent $x.\sigma$ sont dans $\mathcal{U}_z$.

Cas semi-simple: Soit $x.\sigma$ un élément pseudo-unipotent régulier rationnel, alors, par définition, il existe $g\in G$ tel que $x.\sigma={}^{g}(u_0.\sigma)$ et tel que $g^{-1}F(g)\in$

$\mathrm{C}_G(u_0.\sigma)$ et on a $\mathrm{C}_G(u_0.\sigma) = \mathrm{Z}(G^\sigma) \times \mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. Comme T et U^σ sont connexes, $\mathcal{L}_T$ et $\mathcal{L}_{U^\sigma}$, sont surjectives. Donc, il existe $t \in T$ et $u \in U^\sigma$ et $h \in G^F$ tels que $g = htu$. Ainsi, $x.\sigma = {}^h({}^t(u_0[u_0^{-1}, u].\sigma))$ et $[u_0^{-1}, u] \in (U^\sigma)^*$, donc $x.\sigma \in \mathcal{U}_z$, où z est tel que $t^{-1}F(t) \in z$.

La réciproque est claire car pour tout $u^* \in (U^\sigma)^*$, u_0u^* est régulier dans $(G^\sigma)^0$ ([3] proposition 14.14), et comme, dans $(G^\sigma)^0$ tous les éléments unipotents réguliers sont conjugués ([3] proposition 14.16), il existe $g \in (G^\sigma)^0$ tel que $u_0u^* = {}^g u_0$. Ainsi, $u_0u^*.\sigma = {}^g(u_0.\sigma)$, donc $u_0u^*.\sigma$ est régulier pseudo-unipotent.

(iii) D'après la proposition 3.15, les éléments pseudo-unipotents réguliers sont les conjugués sous G de $u_0.\sigma$. Ainsi, les G^F-classes d'éléments pseudo-unipotents réguliers rationnels sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, A(u_0.\sigma))$, où on note $A(u_0.\sigma) = \mathrm{C}_G(u_0.\sigma)/\mathrm{C}_G(u_0.\sigma)^0$. On rappelle que, comme σ est semi-simple, on a $\mathrm{C}_G(u_0.\sigma) = \mathrm{Z}(G^\sigma) \times \mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. De plus, si la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, alors, $\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$ est connexe. Ainsi, $\mathrm{H}^1(F, A(u_0.\sigma)) = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Le nombre de classes pseudo-unipotentes régulières dans G^F est donc $|\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))|$ Comme les $\mathcal{U}_z$ sont des réunions de telles classes et qu'ils sont disjoints, on en déduit le résultat. □

DÉFINITION 8.2. — Soit c une réunion de classes de conjugaison de $G^F.\sigma$, la fonction de classe γ_c est définie sur $G^F.\sigma$ par:

$$\gamma_c(x) = \begin{cases} |G^F|/|c| & \text{si } x \in c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉFINITION 8.3. — Pour tout $z \in \mathcal{Z}$, on note Φ_z la $(T^\sigma)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$, où $t \in T^\sigma$ est tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on pose

$$\sigma_z = \sum_{\chi \in \Phi_z} \tilde{\chi}(u_0.\sigma).$$

La définition ci-dessus généralise celle des coefficients σ_z qui ont été définis dans [2] (définition 3.4) et dans [3] (définition 14.34) dans le cadre des groupes réductifs connexes. Les coefficients σ_z de $G.\sigma$ peuvent s'exprimer en fonction des coefficients σ_z analogues pour le groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$.

THÉORÈME 8.4. — *(i) Soit $\tilde{\chi}$ un caractère de $\tilde{G}^F$ dont la restriction à G^F est irréductible, et soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, alors, avec les notations ci-dessus,*

$$\begin{aligned} &|\mathcal{U}_z|^{-1} \sum_{u.\sigma \in \mathcal{U}_z} \tilde{\chi}(u.\sigma) \\ &= (-1)^{|(\Pi/\sigma)/\tau|} \sum_{\{z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)) \mid z^{-1}z' \in \mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'} \langle \mathrm{D}_{G.\sigma}(\tilde{\chi}), \Gamma_{z'}^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma}. \end{aligned}$$

(ii) On a $\langle \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}\rangle_{G^F.\sigma} = |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))||\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|q^l$*, où* l *est le rang semi-simple de* $(G^\sigma)^0$*, et* z *parcourt* $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Démonstration. — (i) Soit $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(z)$ (si c'est possible et en particulier lorsque σ est unipotent, on choisit $t \in T^\sigma$). On a vu dans la démonstration de la proposition 7.2, que $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}\phi_z$, où ϕ_z est une fonction de classe de $U^F.{}^t\sigma$ nulle en dehors des éléments réguliers. Plus précisément, on a vu que si $u.{}^t\sigma \in U^F.{}^t\sigma$ est régulier, si on note $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} u_{\mathcal{O}}$ la projection de u sur $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} U_{\mathcal{O}}$ et si on note $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s\}$, les représentants des σ-orbites de Π/τ et pour tout $k \in \{1, \ldots, s\}$, $o(k)$, l'ordre de $\mathcal{O}_k$ sous l'action de σ (rappelons que ${}^t\sigma$ et σ agissent de la même façon sur les racines), alors,

$$\phi_z(u.{}^t\sigma) = \prod_{k=1}^{s-1}(1 - \prod_{l=0}^{o(k)-1} \chi_{\sigma^l(\mathcal{O}_k)}(u_{\sigma^l(\mathcal{O}_k)})),$$

Ainsi, ϕ_z est l'extension normalisée à $U^F.\langle {}^t\sigma\rangle$ d'une fonction de classe ${}^t\sigma$-stable sur U^F, triviale sur $(U^*)^F$. Nous allons montrer que cette propriété de ϕ_z entraîne que $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}\phi_z$ est constante sur chaque $\mathcal{U}_{z'}$.

Soit $z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, soit $t' \in \mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ un représentant de z', soient $x.\sigma$ et $x'.\sigma$ dans $\mathcal{U}_{z'}$, alors, il existe u_* et u'_* dans $((U^\sigma)^*)^F$ tels que $x.\sigma$ et $x'.\sigma$ soient conjugués sous G^F respectivement à ${}^{t'}(u_0u_*.\sigma)$ et ${}^{t'}(u_0u'_*.\sigma)$. On a alors,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}(x'.\sigma)\\
&= \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}\phi_z({}^{t'}(u_0u'_*.\sigma))\\
&= 1/|U^F|\sum_{x\in\mathcal{E}}\phi_z(x^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma)(x^t\sigma t't^{-1})^{-1}),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}$ est défini par $\mathcal{E} = \{x \in G^F | x^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma)(x^t\sigma t't^{-1})^{-1} \in U^F.{}^t\sigma\}$. Cependant, ${}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma$ est un élément régulier du quasi-borel $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$ et $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$ est l'unique quasi-borel qui le contient. Si x est un élément de $\mathcal{E}$, on a

$$x^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma)(x^t\sigma t't^{-1})^{-1} \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B).$$

Cela entraîne que $x^t\sigma t't^{-1}$ est aussi dans $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$ et que $x \in B^F$. On peut ainsi écrire $x^t\sigma t't^{-1} = vy$ avec $v \in U^F$ et $y \in T^{{}^t\sigma}.{}^t\sigma$. On obtient alors:

$$vy({}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma)(vy)^{-1} = vy{}^tuy^{-1}{}^t\sigma(v)^{-1}w.{}^t\sigma$$

avec $w \in U^*$. Mais comme ϕ_z est une extension à $U^F.\langle\sigma\rangle$ d'une fonction de classe ${}^t\sigma$-stable de U^F triviale sur $(U^*)^F$, $\phi_z(vy{}^tuy^{-1}{}^t\sigma(v)^{-1}w.{}^t\sigma)$ ne dépend pas de w et $\phi_z(x^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*).{}^t\sigma)(x^t\sigma t't^{-1})^{-1})$ ne dépend pas de u'_*. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}(x'.\sigma) &= \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}\phi_z({}^{t'}(u_0u'_*.\sigma))\\ &= \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}\phi_z({}^{t'}(u_0u_*.\sigma))\\ &= \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}(x.\sigma).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}$ est constant sur $\mathcal{U}_{z'}$, pour tout $z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. On sait, d'après la proposition 8.1, que lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), l'ensemble des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $G^F.\sigma$ est la réunion des $\mathcal{U}_{z'}$, on en conclut grâce au (i) de la proposition 7.2 que $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}$ est nul en dehors des $\mathcal{U}_{z'}$. Ainsi, en utilisant la notation $\gamma_{z'}$ pour $\gamma_{\mathcal{U}_{z'}}$, on peut écrire:

$$\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma} = \sum_{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))} c_{z,z'}\gamma_{z'}$$

pour une matrice de coefficients $(c_{z,z'})$.

D'après le (ii) de la proposition 7.2, on a:

$$\langle\Gamma_{z''}^{G.\sigma}, (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}\rangle_{G^F.\sigma} = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|\delta_{z,z''}.$$

Donc, on obtient les relations suivantes sur les coefficents $c_{z,z'}$:

$$\sum_{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))} c_{z,z'}((-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}/|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|)\langle\Gamma_{z''}^{G.\sigma}, \gamma_{z'}\rangle_{G^F.\sigma} = \delta_{z,z''}.$$

Ce qui entraîne que $(c_{z,z'})$ est inversible et a pour inverse la matrice $(d_{z,z'})$ définie par:

$$d_{z,z'} = ((-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}/|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|)\langle\Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \gamma_z\rangle_{G^F.\sigma}.$$

Nous allons maintenant expliciter $\langle\Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \gamma_z\rangle_{G^F.\sigma}$.

Par définition, $\Gamma_{z'}^{G.\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}({}^t\tilde{\chi}_1)$, où $({}^t\tilde{\chi}_1)$ est l'extension normalisée à $U^F.\langle{}^t\sigma\rangle$ d'un caractère régulier ${}^t\sigma$-stable de U^F qui se factorise à travers $U^F/(U^*)^F$. Ainsi, comme ci-dessus, on peut montrer que $\Gamma_{z'}^{G.\sigma}$ est constant sur les ensembles $\mathcal{U}_{z''}$.

Cependant, $\langle\Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \gamma_z\rangle_{G^F.\sigma}$ est la valeur moyenne de $\Gamma_{z'}^{G.\sigma}$ sur $\mathcal{U}_z$. Par définition de t, l'élément ${}^t(u_0.\sigma)$ appartient à $\mathcal{U}_z$, ce qui entraîne immédiatement que $\langle\Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \gamma_z\rangle_{G^F.\sigma} = \Gamma_{z'}^{G.\sigma}({}^t(u_0.\sigma))$.

Calculons donc $\Gamma_{z'}^{G.\sigma}({}^t(u_0.\sigma))$. Supposons tout d'abord que $z^{-1}z'$ ne soit pas dans $\mathcal{Z}$, alors, d'après le lemme 7.6,

$$\Gamma_{z'}^{G.\sigma}({}^t(u_0.\sigma)) = \mathrm{Ind}_{U^F.{}^{t'}\sigma}^{G^F.{}^{t'}\sigma}({}^{t'}\tilde{\chi}_1)({}^tu_0.{}^t\sigma) = 0.$$

Maintenant, supposons $z^{-1}z'$ dans $\mathcal{Z}$. Il existe $t_0 \in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t_0) \in z^{-1}z'$. Alors $t' = t_0 t$ est un représentant de z', ${}^{t'}\sigma = {}^t\sigma$ et ${}^{t'}\chi_1$ est ${}^t\sigma$-stable.

$$\begin{aligned}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}({}^t(u_0.\sigma)) &= \mathrm{Ind}_{U^F.{}^t\sigma}^{G^F.{}^t\sigma}(\widetilde{{}^{t'}\chi_1})({}^t(u_0.\sigma))\\ &= 1/|U^F| \sum_{\{g\in G^F | g({}^tu_0)({}^t\sigma)(g)^{-1}\in U^F\}} (\widetilde{{}^{t'}\chi_1})(g({}^tu_0.{}^t\sigma)g^{-1})\end{aligned}$$

Lemme 8.5. — *Soit $g \in G^F$ tel que $g({}^tu_0.{}^t\sigma)g^{-1} \in U.{}^t\sigma$, alors $g \in (T^\sigma)^F U^F$.*

Démonstration. — Soit $g \in G^F$. On suppose que l'on a $(g({}^tu_0.{}^t\sigma)g^{-1} \in U.{}^t\sigma)$. Comme B est un sous-groupe de Borel σ-stable, B est aussi ${}^t\sigma$-stable et on a $\mathrm{N}_{\tilde{G}}(B) = B.\langle {}^t\sigma\rangle$. Donc, on a $g({}^tu_0.{}^t\sigma)g^{-1} \in \mathrm{N}_{\tilde{G}}(B)$, ce qui entraîne que ${}^tu_0.{}^t\sigma$ normalise le sous-groupe de Borel ${}^{g^{-1}}B$. Cependant, comme ${}^tu_0.{}^t\sigma$ est régulier, il ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel. Ainsi, on a ${}^{g^{-1}}B = B$ et $g \in B^F$.

On pose $g = \tau v$ avec $\tau \in T^F$ et $v \in U^F$. Un calcul rapide montre que si on a $\tau v({}^tu_0.{}^t\sigma)(\tau v)^{-1} \in U.{}^t\sigma$, alors $\tau \in (T^\sigma)^F$. D'où le lemme 8.5 □

D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}({}^t(u_0.\sigma)) &= 1/|U^F| \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F,\ u\in U^F} (\widetilde{{}^{t'}\chi_1})(u({}^{\tau t}u_0.{}^t\sigma)u^{-1})\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} (\widetilde{{}^{t'}\chi_1})({}^{\tau t}u_0.{}^t\sigma)\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{t'}\chi_1({}^{\tau t}u_0) \text{ car } {}^{\mathrm{t}}\sigma = {}^{\mathrm{t}'}\sigma\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{\tau t_0}\chi_1(u_0)\\ &= |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|\sigma_{z^{-1}z'}.\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du lemme suivant:

Lemme 8.6. — *Soit $z_0 \in \mathcal{Z}$ et soit $t_0 \in T^\sigma$ tel que $t_0^{-1}F(t_0) \in z_0$, alors on a: $\sigma_z = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|^{-1} \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{\tau t_0}\chi_1(u_0)$.*

Démonstration. — Par définition, on a $\sigma_{z_0} = \sum_{\chi\in\Phi_{z_0}} \tilde{\chi}(u_0.\sigma)$, ce que l'on peut écrire $\sigma_{z_0} = \sum_{\chi\in\Phi_{z_0}}(u_0)$, car tous les caractères de Φ_{z_0} sont σ-stables. Comme Φ_{z_0} est la $(T^\sigma)^F$-orbite de ${}^{t_0}\chi_1$, il suffit de montrer que pour $\tau \in (T^\sigma)^F$, on a ${}^{\tau t_0}\chi_1(u_0) = {}^{t_0}\chi_1(u_0)$ si et seulement si $t \in \mathrm{Z}(G^\sigma)^F$. Mais, ${}^{\tau t_0}\chi_1(u_0) = {}^{t_0}\chi_1(u_0)$ signifie que ${}^{\tau^{-1}}u_0 = u_0$, c'est-à-dire, comme τ est σ-stable que τ appartient au centralisateur dans G de $u_0.\sigma$. Mais comme $u_0.\sigma$ est régulier, on a $\mathrm{C}_G(u_0.\sigma) \cap (T^\sigma)^F = \mathrm{Z}(G^\sigma)^F$, d'où le résultat. □

L'inverse $(d_{z,z'})$ de la matrice $(c_{z,z'})$ est donc défini par:

$$d_{z,z'} = \begin{cases} (-1)^{(\Pi/\tau)/\sigma} \sigma_{z^{-1}z'} & \text{si } z^{-1}z' \in \mathcal{Z}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et la relation $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma} = \sum_{z' \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))} c_{z,z'}\gamma_{z'}$ peut être inversée et on obtient:

$$\gamma_z = (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|} \sum_{\{z' \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma)) | z^{-1}z' \in \mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'} \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}.$$

Ce qui entraîne que:

$$\langle \gamma_z, \tilde{\chi} \rangle_{G^F.\sigma} = (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|} \sum_{\{z' \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma)) | z^{-1}z' \in \mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'} \langle \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \tilde{\chi} \rangle_{G^F.\sigma},$$

On obtient alors le (i) du théorème 8.4:

$$\begin{aligned} &|\mathcal{U}_z|^{-1} \sum_{u.\sigma \in \mathcal{U}_z} \tilde{\chi}(u.\sigma) \\ &= (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|} \sum_{\{z' \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma)) | z^{-1}z' \in \mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'} \langle \Gamma_{z'}^{G.\sigma}, \mathrm{D}_{G.\sigma}\tilde{\chi} \rangle_{G^F.\sigma}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer le (ii) du théorème 8.4.

$$\begin{aligned} \langle \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma} &= \langle \sum_z \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_z^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma} \\ &= \langle \sum_{z,z'} c_{z,z'}\gamma_{z'}; \sum_{z,z'} c_{z,z'}\gamma_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} \\ &\quad \text{(en reprenant les notations du (i))} \\ &= \sum_{z'} \langle \sum_z c_{z,z'}\gamma_{z'}; \sum_z c_{z,z'}\gamma_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} \\ &\quad \text{(car } \langle \gamma_z; \gamma_{z'} \rangle_{G^F.\sigma} = 0 \text{ si } z \neq z', \text{ les } \mathcal{U}_z \text{ étant disjoints)} \end{aligned}$$

Nous allons montrer en utilisant une série de lemmes (8.7 à 8.10) que $\sum_z c_{z,z'} = 1$, cela revient à montrer que $\sum_{z'} c_{1,z'} = 1$ car on a $c_{z,z'} = c_{1,z^{-1}z'}$ (la matrice $(d_{z,z'})$ vérifie en effet $d_{z,z'} = d_{1,z^{-1}z'}$ pour tout $z, z' \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ c'est donc encore vrai pour la matrice inverse $(c_{z,z'})$).

$$\begin{aligned} \sum_{z'} c_{1,z'} &= \langle \mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma_1^{G.\sigma}; \mathrm{Id}_{G.\sigma} \rangle \\ &= \langle \Gamma_1^{G.\sigma}; \mathrm{St}_{G.\sigma} \rangle \\ &= |G^F|^{-1} \sum_{g.\sigma \in G^F.\sigma} \Gamma_1^{G.\sigma}(g.\sigma)\overline{\mathrm{St}_{G.\sigma}(g.\sigma)} \end{aligned}$$

Or $\Gamma_1^{G.\sigma}(g.\sigma) = \mathrm{Ind}_{U^F.\sigma}^{G^F.\sigma}\tilde{\chi_1}$ est nul si $g.\sigma$ n'est pas conjugué sous G^F à un élément de $U^F.\sigma$. Par ailleurs, $\mathrm{St}_{G.\sigma}(g.\sigma) = 0$ si $g.\sigma$ n'est pas quasi-semi-simple.

LEMME 8.7. — *Lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), si $g.\sigma$ est à la fois unipotent (resp. pseudo-unipotent) et quasi-semi-simple, alors, $g.\sigma$ est conjugué sous G à σ.*

Démonstration. — Le cas unipotent est traité par [9] (proposition II.2.21). Considérons le cas où σ est semi-simple. D'après le corollaire 3.12, comme $g.\sigma$ est pseudo-unipotent, il existe $x \in G$ et $u \in U^\sigma$ tels que $g.\sigma = {}^x(u.\sigma)$. Alors $u.\sigma$ est quasi-semi-simple et il existe un couple $T' \subset B'$ formé d'un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel de G stables par conjugaison par $u.\sigma$. Comme u est unipotent, σ est semi-simple et comme u et σ commutent, u est la partie unipotente et σ la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $u.\sigma$. Ainsi, le fait que $u.\sigma \in \mathrm{N}_G(B')$ (resp. $\mathrm{N}_G(T', B')$) entraîne que u et σ sont dans $\mathrm{N}_G(B')$ (resp. $\mathrm{N}_G(T', B')$). Donc, B' et T' sont σ-stables et $u \in T'$. Ainsi, u est à la fois unipotent et semi-simple, ce qui entraîne que $u = 1$. □

D'après la proposition 3.21 de [3], si $h \in G$, alors $g.\sigma = {}^h\sigma$ est rationnel si et seulement si $h^{-1}F(h) \in G^\sigma$ et les G^F-classes de conjugaison de $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, G^\sigma/(G^\sigma)^0) = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ (théorème 2.3, (ii)). Pour toute F-classe $z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, on choisit un élément t' dans $\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que l'image de $\mathcal{L}_T(t') = t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$ soit dans z'. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces représentants et on obtient:

$$\begin{aligned}\sum_{z'} c_{1,z'} &= |G^F|^{-1} \sum_{t' \in \mathcal{E}} |\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)| \Gamma_1^{G.\sigma}({}^{t'}\sigma)\overline{\mathrm{St}_{G.\sigma}({}^{t'}\sigma)} \\ &= |G^F|^{-1} \sum_{t' \in \mathcal{E}} |\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)| \Gamma_1^{G.\sigma}({}^{t'}\sigma) |((G^{{}^{t'}\sigma})^0)^F|_p\end{aligned}$$

(Lorsque σ est unipotent G^σ est connexe et $\mathcal{E} = \{1\}$).

LEMME 8.8. — *Soit $t' \in \mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que l'image de $\mathcal{L}_T(t') = t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$ ne soit pas dans la F-classe triviale de $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, alors, on a $\Gamma_1^{G.\sigma}({}^{t'}\sigma) = 0$.*

Démonstration. —

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{G.\sigma}({}^{t'}\sigma) &= \mathrm{Ind}_{U^F.\sigma}^{G^F.\sigma}\tilde{\chi_1}({}^{t'}\sigma) \\ &= |U^F|^{-1} \sum_{\{x \in G^F \mid x{}^{t'}\sigma x^{-1} \in U^F.\sigma\}} \tilde{\chi_1}(x{}^{t'}\sigma x^{-1})\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma) \cap U.\sigma$ est vide. Or:

LEMME 8.9. — *Si σ est un élément quasi-central rationnel du quasi-tore $\mathrm{N}_G(T,B)$, alors,* $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$.

Démonstration. — On va d'abord montrer que $\mathrm{Cl}_G(\sigma) \cap B.\sigma = \mathrm{Cl}_B(\sigma)$.

Soit $x \in G$ tel que $x.\sigma x^{-1} \in B.\sigma$. Alors, le sous-groupe de Borel ${}^{x^{-1}}B$ est σ-stable. Le sous-groupe de ${}^{x^{-1}}B$ contient un tore maximal σ-stable T' ([4] proposition 1.11 (i)) et les couples $T \subset B$ et $T' \subset {}^{x^{-1}}B$ sont conjugués sous G^σ ([4] proposition 1.21). Donc, il existe $g \in G^\sigma$ tel que ${}^{x^{-1}}B = {}^gB$, c'est-à-dire tel que $xg \in B$ et si on pose $b = xg$, alors $x\sigma x^{-1} = b\sigma b^{-1}$. D'où, l'égalité $\mathrm{Cl}_G(\sigma) \cap B.\sigma = \mathrm{Cl}_B(\sigma)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Cl}_B(\sigma) \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_U(\sigma)$. Soit $b \in B$ tel que $b\sigma b^{-1} = u.\sigma \in U.\sigma$. On peut écrire de façon unique $b = tv$ avec $t \in t$ et $v \in U$. Alors, un calcul rapide montre que si $b\sigma b^{-1} = u.\sigma$, alors on a $b\sigma b^{-1} \in \mathrm{Cl}_U(\sigma)$.

On a donc, $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_U(\sigma)^F$. Or, d'après la proposition 3.21 de [3], les U^F-classes de conjugaisons de $\mathrm{Cl}_U(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, U^\sigma)$, et comme U^σ est connexe, on a $\mathrm{Cl}_U(\sigma)^F = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. D'où, $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. □

D'après le lemme 8.9 ci-dessus, on a $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma) \cap U.\sigma$. Donc $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma) \cap U.\sigma \subset \mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)$; or on a vu plus haut que les G^F-classes de conjugaison de $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, G^\sigma/(G^\sigma)^0) = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$. En particulier, la classe $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)$ est la G^F-classe paramétrée par la F-classe z' de l'image de $t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, elle est distincte de $\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)$, car z' n'est pas triviale. Donc $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma) \cap U.\sigma$ est vide. On en déduit le lemme 8.8. □

Revenons à la démonstration du (ii) du théorème 8.4. Le lemme 8.8 permet d'écrire que:

$$\sum_{z'} c_{1,z'} = |G^F|^{-1} |\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)| \Gamma_1^{G.\sigma}(\sigma) | ((G^\sigma)^0)^F|_p$$

(Le résultat est évident lorsque σ est unipotent et le lemme 8.8 est alors inutile).

Nous allons calculer $\Gamma_1^{G.\sigma}(\sigma)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{G.\sigma}(\sigma) &= \mathrm{Ind}_{U^F.\sigma}^{G^F.\sigma} \tilde{\chi_1}(\sigma) \\ &= |U^F|^{-1} \sum_{\{x \in G^F \mid x\sigma x^{-1} \in U^F.\sigma\}} \tilde{\chi_1}(x\sigma x^{-1})\end{aligned}$$

LEMME 8.10. — *Soit $x \in G^F$, alors on a $x\sigma(x)^{-1} \in U^F$ si et seulement si $x \in U^F(G^\sigma)^F$.*

Démonstration. — D'après le lemme 8.9, on a $\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma) \cap U.\sigma = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. Ainsi, si $x \in G^F$ est tel que $x\sigma(x)^{-1} \in U^F$ alors, il existe $v \in U^F$ tel que $x\sigma x^{-1} = v\sigma v^{-1}$, c'est-à-dire tel que $xv^{-1} \in G^\sigma$.

La réciproque est évidente. □

Ainsi, $\Gamma_1^{G.\sigma}(\sigma) = |U^F|^{-1}|U^F||(G^\sigma)^F||(U^\sigma)^F|^{-1} = |(G^\sigma)^F||(U^\sigma)^F|^{-1}$. Et l'on obtient comme annoncé que:

$$\sum_{z'} c_{1,z'} = |G^F|^{-1}|\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)||(G^\sigma)^F||(U^\sigma)^F|^{-1}|((G^\sigma)^0)^F|_p = 1.$$

La dernière égalité vient du fait que $|G^F| = |\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)||(G^F)^\sigma|$ et du fait que $|((G^\sigma)^0)^F|_p = |(U^\sigma)^F|$, ce dernier résultat étant de [3] (proposition 3.19).

Terminons maintenant la démonstration de 8.4 (ii). On a:

$$\begin{aligned}\langle \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}\rangle_{G^F.\sigma} &= \sum_{z'} \langle \gamma_{z'}; \gamma_{z'}\rangle_{G^F.\sigma} \\ &= \sum_{z'} |G^F|/|\mathcal{U}_{z'}|\end{aligned}$$

Or, si z et z' sont deux éléments de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$ et si t et t' sont respectivement des représentants dans $\mathcal{L}_{T^\sigma}^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ de z et z', alors, $\mathcal{U}_{z'} = {}^{t't^{-1}}\mathcal{U}_z$. Donc, tous les $\mathcal{U}_z$ ont le même cardinal.

Calculons tout d'abord le cardinal de $\mathcal{U}_z$ lorsque σ est unipotent. Selon le (ii) de la proposition 8.1, l'ensemble des éléments réguliers unipotents de $G^F.\sigma$ est la réunion des $\mathcal{U}_z$, donc le cardinal de n'importe quel $\mathcal{U}_z$ est égal au nombre d'éléments réguliers unipotents de $G^F.\sigma$ divisé par le cardinal de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Ainsi, par le théorème 3.6, on a

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F| \times q^l \times |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))|)$$

où l est le rang-semi-simple de G^σ. On peut alors simplifier l'expression de $|\mathcal{U}_z|$ en utilisant le fait que $|\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))| = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|/|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F|$, on obtient alors:

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F| \times q^l).$$

Considérons finalement le cas semi-simple. Il existe $t \in (T^\sigma)^0$ tel que

$$\mathcal{U}_z = \{x.\sigma \in G^F.\sigma | x.\sigma \sim_{G^F} {}^t(u_0(U^\sigma)^*).\sigma\}$$

Par ailleurs, $\mathcal{U}_z$ est une réunion de G^F-classes unipotentes qui sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0))$. Pour toute F-classe de $\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$, on peut choisir un représentant dans U^σ, soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ un ensemble de tels représentants.

Alors, $\mathcal{U}_z$ est la réunion disjointe des classes $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{tu_i}u_0.\sigma)$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{U}_z| &= \sum_i |\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{tu_i}u_0.\sigma)| \\
&= \sum_i |G^F|/|\mathrm{C}_{G^F}({}^{tu_i}u_0.\sigma)| \\
&= \sum_i |G^F|/|\mathrm{C}_{(G^\sigma)^F}({}^{tu_i}u_0)| \\
&= \sum_i (|G^F|/|\mathrm{C}_{(G^\sigma)^{0F}}({}^{tu_i}u_0)|) \times (|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|) \\
&= (|G^F|/|(G^\sigma)^{0F}|) \times (|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|) \sum_i |\mathrm{Cl}_{(G^\sigma)^{0F}}({}^{tu_i}u_0)| \\
&= (|G^F|/|(G^\sigma)^{0F}|) \times (|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|) \times |\mathcal{U}'_{z'}|
\end{aligned}$$

où $\mathcal{U}'_{z'}$ est le sous-ensemble de $(G^\sigma)^0$ défini par $\mathcal{U}'_{z'} = \{x.\sigma \in (G^\sigma)^{0F} | x \sim_{(G^\sigma)^{0F}} {}^t(u_0(U^\sigma)^*)\}$ et $z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ est tel que $t^{-1}F(t) \in z'$. Alors, la réunion disjointe des $\mathcal{U}'_z$, pour $z \in \mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))$ est l'ensemble des éléments réguliers unipotents de $(G^\sigma)^{0F}$ ([2] proposition 3.2). Par ailleurs, les $\mathcal{U}'_z$ sont géométriquement conjugués et sont donc tous de même cardinal qui est égal au nombre des unipotents réguliers de $(G^\sigma)^{0F}$ divisé par $|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))|$, c'est-à-dire, à

$$|(G^\sigma)^{0F}|/(|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))| \times |Z((G^\sigma)^0)^{0F}|q^l),$$

où l est le rang semi-simple de $(G^\sigma)^0$ ([3] proposition 14.23).

En utilisant le fait que $|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))| = |Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z((G^\sigma)^0)^{0F}|$, on en déduit le cardinal de $\mathcal{U}_z$ lorsque σ est semi-simple et on retrouve la même formule que dans le cas unipotent:

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|Z(G^\sigma)^F|q^l)$$

Remarque 8.11. — Les calculs ci-dessus montrent que le nombre d'éléments pseudo-unipotents réguliers rationnels de $G^F.\sigma$ est égal à $|\mathrm{H}^1(F, Z(G^\sigma))|$ multiplié par le cardinal de $\mathcal{U}_z$, on retrouve la formule du théorème 3.6:

$$|G^F|/(|Z((G^\sigma)^0)^F|q^l)$$

On peut maintenant terminer les calculs du théorème 8.4

$$\begin{aligned}
\langle \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma}; \sum_z \Gamma_z^{G.\sigma} \rangle_{G^F.\sigma} &= \sum_{z'} |G^F|/|\mathcal{U}_{z'}| \\
&= |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))| \times (|G^F|/|\mathcal{U}_{z'}|) \\
&= |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))| \times |Z(G^\sigma)^F|q^l
\end{aligned}$$

□

Nous allons appliquer les résultats précédents au cas où $\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe.

COROLLAIRE 8.12. — *Supposons $\mathrm{Z}(G^\sigma)$ connexe, alors on a une unique représentation de Gelfand-Graev de $G.\sigma$ que l'on note Γ, et $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma$ est égal à $|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|q^l$ sur les éléments réguliers unipotents lorsque σ est unipotent et pseudo-unipotents lorsque σ est semi-simple (et à zéro ailleurs).*

Démonstration. — Clair car dans ce cas, $\mathcal{U}_1$ est l'ensemble de tous les unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers et on a $\mathrm{D}_{G.\sigma}\Gamma = \gamma_{\mathcal{U}_1}$ en prenant pour $\gamma_{\mathcal{U}_1}$ la définition 8.2. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.W. Carter, Finite groups of Lie type (Wiley-Interscience, 1985)

[2] F. Digne, G.I. Lehrer, J. Michel, The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre (J. reine angew. Math., no 425, 1992, p. 155-192)

[3] F. Digne, J. Michel, Representations of Finite Groups of Lie Type (London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press)

[4] F. Digne, J. Michel, Groupes réductifs non connexes (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4e série, t. 27, 1994, p. 345-406)

[5] F. Digne, J. Michel, Points fixes des automorphismes quasi-semi-simples (C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1055-1060)

[6] G. Malle, Generalized Deligne-Lusztig characters (Journal of Algebra, vol. 159, no 1, 1993, p. 64-97)

[7] K. Sorlin, Représentations de Gelfand-Graev et correspondance de Springer dans les groupes réductifs non connexes (mémoire de thèse, Université de Picardie, 2001)

[8] K. Sorlin, Représentations de Gelfand-Graev pour les groupes réductifs non connexes (C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, 2002)

[9] N. Spaltenstein, Classes unipotentes et sous-groupes de Borel (Lectures Notes in Mathematics, no 946, Springer, 1982)

[10] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups (Memoirs of AMS, no 80, 1968)

LAMFA, Université de Picardie, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France.
Courrier électronique : karine_sorlin@yahoo.fr