

Partiel de Méthodes expérimentales -

Les calculatrices sont INTERDITES.

Les étudiant-e-s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.

Le barème indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours (3 points) :

- Soit $t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t)$. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe en $c(5\pi/6)$?
- Quelle peut être l'allure d'une courbe au voisinage d'un point non birégulier d'une courbe paramétrée $t \in I \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$? On dessinera schématiquement tous les cas de figure avec leurs noms.

Exercice 1 (\simeq 5 points) : Soit $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 25x^2 + 50x - 4y^2 + 16y + 8 = 0\}$.

- Comment appelle-t-on ce type d'ensemble?
- Réduire son équation par un changement de repère.
- Donner, par un dessin, l'allure de l'ensemble \mathcal{H} dans le nouveau repère (avec coordonnées des points intéressants, asymptotes,...).
- Donner deux paramétrages distincts de la branche $\mathcal{H}^- = \{(x, y) \in \mathcal{H}, y < 0\}$. On démontrera que ce sont effectivement des paramétrages.

Exercice 2 (\simeq 6 points) :

- Donner le plan d'étude d'une courbe paramétrée vu en cours.
- Étudier (et tracer) la courbe paramétrée $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos 3t, \sin 6t)$ en respectant le plan d'étude.

Indications pour la recherche des points non biréguliers :

- On **montrera** que la fonction $x'y'' - x''y'$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 54 \sin 3t \sin 6t + 54 \cos 3t$$

et s'annule en $t = \frac{\pi}{6}$.

- On **admettra** que sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, cette fonction a un seul zéro en $t = \frac{\pi}{6}$, et qu'elle change de signe en ce point. Et on **calculera** $c'(\pi/6)$, $c''(\pi/6)$, $c'''(\pi/6)$.

- (Question bonus facultative, hors barème) Montrer que $x'y'' - x''y'$ n'a qu'un seul zéro sur $[0, \pi/3]$. Montrer par exemple que $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 27(3 \cos 3t - \cos 9t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (\simeq 6 points) :

- Donner rapidement la définition, le domaine de définition, les propriétés remarquables, la dérivée et l'allure (schématique) du graphe de $x \mapsto \arcsin x$.
- Donner le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$, puis étudier la courbe paramétrée par $t \in D \mapsto (\arcsin t, \frac{1}{t^2(t^2-1)})$ en suivant le plan d'étude vu en cours.

Indication: On admettra que la fonction $x'y'' - x''y'$ est strictement négative sur son ensemble de définition.