Partiel de Méthodes expérimentales - Mardi 27 mars

Les calculatrices sont INTERDITES. Les étudiant(e)s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français. Le barême indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours (3 points)
a) Donnez la définition d'une courbe paramétrée plane (encore appelée arc paramétré plan).
b) Donnez la définition du support, ou trajectoire, d'une courbe paramétrée plane.
c) Donnez la définition d'une conique.

Question de TP (1 point) : Quelle instruction MAPLE utiliser pour tracer les fonctions $f : x \to \cos x$ et $g : x \to \sin x$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ sur le même graphique ?

Exercice 1 (6 points) : Soit c la courbe paramétrée par $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) = (4\cos t + \cos(2t), \sin(2t))$.
1) Rappeler le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane.
2) Questions préliminaires
a) Montrer que $x'(t) = -4\sin t(1 + \cos t)$.
b) Calculer les valeurs de $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ en $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.
c) Montrer que les seuls zéros de la fonction $\varphi : x \mapsto -16x^3 + 24x + 8$ sur $[-1, 1]$ sont -1 et $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
d) Montrer que $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \varphi(\cos t)$.
e) Soit $\frac{\pi}{2} < t_0 < \frac{2\pi}{3}$ l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos t_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \simeq -0,35$. On ADMET que la courbe a un point d'inflexion en $c(t_0)$.
f) Montrer qu'au point $c(\pi)$ les deux premiers entiers caractéristiques valent $p = 1$ et $q = 4$.
3) Faire l'étude complète de la courbe et la tracer en s'aidant des questions-indications ci-dessus.

Exercice 2 (6 points) : Soit $c : t \in D \mapsto (x(t) = \tan t + \sin t, y(t) = \dfrac{1}{\cos t})$ une courbe paramétrée.
1) Préciser quel est son domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$.
2) Questions préliminaires à l'étude.
a) $*$ Étudier les variations de la fonction $\varphi : x \to -2x^3 + 3x + 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
$*$ Montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = -1$ et $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
$*$ En déduire que la fonction $t \in [0, \pi] \mapsto \varphi(\cos t)$ s'annule en deux points exactement. On appellera t_0 l'unique réel de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $\cos t_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin t}{\cos t} = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - \sin t}{\cos t} = 0^-$.
3) Étudier complètement et tracer cette courbe paramétrée.
Indications pour l'étude des points non biréguliers :
$*$ Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$, on a $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -2(\cos t)^3 + 3\cos t + 1$, et en déduire quels sont les points non biréguliers.
$*$ En un point singulier $c(t)$, on calculera les deux entiers caractéristiques p et q. Rappelons que le premier vecteur dérivé non nul $c^{(p)}(t)$ donne la direction de la tangente à la courbe en $c(t)$.
$*$ On **ADMETTRA** que le point $c(t_0)$ est un point d'inflexion, où $t_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ est l'unique réel tel que $\cos t_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et on ne cherchera pas à le placer précisément sur le dessin.

Exercice 3 (6 points) Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - 6x + 4y^2 + 8y - 3 = 0$.
a) Quel est le nom de ce type de courbe?
b) Par un changement de repère orthonormé, trouver une équation plus simple pour $\mathcal{C}$.
c) Tracer cette courbe.
d) Soit $M_0(X_0, Y_0) \in \mathcal{C}$. Quelle est l'équation de la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ (dans le nouveau repère)?
e) Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points distincts de la courbe. À quelle condition sur les coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les tangentes à $\mathcal{C}$ en M_1 et M_2 sont-elles orthogonales?