Université Picardie Jules Verne — Faculté de Mathématiques et Informatique
Licence 1 Semestre 2 — « Méthodes expérimentales » 2005

Partiel de Méthodes expérimentales - Mardi 29 mars- 10h30-12h30

Les calculatrices sont INTERDITES.
Les étudiant(e)s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.
Le barême indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours (1.5 points) : Donnez la définition d'une courbe paramétrée plane (encore appelée arc paramétré plan).

Question de TP (0.5 points) : Quelle instruction MAPLE utiliser pour tracer les fonctions $f : x \to \sinh x$ et $g : x \to \cosh x$ sur l'intervalle $[-5, 5]$, en limitant la variation de l'ordonnée y dans l'intervalle $[-10, 10]$?

Exercice 1 (3 points) : Considérons la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $25y^2 - 9x^2 - 350y - 36x + 964 = 0$ dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
0) Comment appelle-t-on de telles courbes?
1) Donnez un repère orthonormé dans lequel la courbe $\mathcal{C}$ admet une équation réduite, et donnez cette équation réduite.
2) Tracez la courbe dans ce nouveau repère, en plaçant (sans justification) sur le dessin :

- l'origine et les vecteurs de base du nouveau repère,
- les asymptotes et/ou directions principales éventuelles,
- le(s) sommet(s) et leurs coordonnées dans le nouveau repère,
- le(s) foyer(s) et leurs coordonnées (dans le nouveau repère).

Exercice 2 (1 point) : Considérons le graphe de la fonction $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos x$. Comment peut-on modifier f pour que son graphe soit :
1) translaté d'une longueur 2 vers la droite, et d'une longueur 1 vers le haut?
2) dilaté horizontalement d'un facteur 3, et inchangé verticalement?

Exercice 3 (7 points) : Étudiez la courbe paramétrée par

$$c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) := \left(x(t) = \cosh t,\, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \arctan t \right)$$

en suivant les étapes du plan d'étude vu en cours.
Indications pour l'étape 3 : La fonction $t \mapsto \det(c'(t), c''(t))$ *est décroissante sur* $]-\infty, -t_0]$, *croissante sur* $[-t_0, 0]$, *décroissante sur* $[0, t_0]$, *puis croissante sur* $[t_0, +\infty[$, *avec* $t_0 \simeq 0.3$. *Cette même fonction s'annule sans changer de signe en* 0 *et s'annule en changeant de signe en* $-t_1$ *et* t_1 *avec* $t_1 \simeq 0.5$. *On donne* $y'''(0) = 6$. *On a également* $x(t_1) \simeq 1.13$, $y(t_1) \simeq 0.1$, $x'(t_1) \simeq 0.53$, $y'(t_1) \simeq 0.46$, $x''(t_1) \simeq 1.13$, $y''(t_1) \simeq 0.99$, $x'''(t_1) \simeq 0.53$, $y'''(t_1) \simeq -2.44$.

Exercice 4 (7 points) : On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Δ la droite d'équation $x = 1$, et D_θ la droite passant par l'origine, et faisant un angle $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ avec l'axe $(0x)$ (et donc de pente $\tan\theta$). On note $A(\theta)$ le point d'intersection de D_θ et Δ, et $M(\theta)$ le point de D_θ tel que

$$AM(\theta) = 2 \quad \text{et} \quad A \in [0M(\theta)].$$

1) Trouvez les coordonnées du point $A(\theta)$, la distance $0A(\theta)$, exprimez $\overrightarrow{0M(\theta)}$ en fonction de $\overrightarrow{0A(\theta)}$, puis donnez les coordonnées de $M(\theta)$, et déduisez-en un paramétrage $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto c(\theta)$ de la courbe décrite par $M(\theta)$ lorsque θ varie dans $]-\pi/2, \pi/2[$.
2) Étudiez cette courbe (**sans calculer** les entiers p et q au(x) point(s) non birégulier(s)).
Indications : $\theta_0 = \arctan\sqrt{3/2} \simeq 0.88$, $c(\theta_0) \simeq (2.26, 2.77)$, $c'(\theta_0) \simeq (-1.55, 3.76)$.