Université Picardie Jules Verne
Licence 1 Semestre 2

Faculté de Mathématiques et Informatique
« Méthodes expérimentales » 2005

Examen de Méthodes expérimentales - Deuxième session - Mercredi 22 juin 2005 - 16h30-18h30
Amphi Parmentier

Les calculatrices sont INTERDITES.
Les étudiant(e)s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.
Le BARÊME indiqué est APPROXIMATIF, et pourra être modifié.

Question de cours (1.5 points) : Donner la définition d'une *conique plane.*

Exercice 1 ($\simeq$ 6.5 points) : a) Donner rapidement la définition, le domaine de définition, la dérivée et la parité éventuelle des fonctions $x \mapsto \arccos x$ et $x \mapsto \cosh(x)$.
b) En déduire l'ensemble de définition de la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cosh t, \arccos t - \frac{\pi}{2})$.
c) Donner les 5 étapes du plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes.
d) En utilisant les indications ci-dessous, étudier et tracer la courbe paramétrée définie en b). *On prendra soin de détailler chaque étape du plan d'étude.*
Indications : (1) On donne la valeur $\cosh(2) \simeq 3.76$, et on admettra que l'application $t \mapsto x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ s'annule uniquement aux points $t_0 \simeq 0.73$ et $-t_0 \simeq -0.73$, et qu'elle change de signe en ces points.
(2) On admettra qu'aux bornes de son intervalle de définition, la courbe admet des tangentes verticales.

Exercice 2 ($\simeq$ 5.5 points) :
a) Donner les 6 étapes du plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées polaires.
b) En utilisant les indications ci-dessous, étudier et tracer la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\theta \in \mathbb{R} \mapsto c(\theta) := (\theta, \rho(\theta))$, avec $\rho(\theta) := 1 + \cos^2(3\theta)$. *On prendra soin de détailler chaque étape du plan d'étude.*
Indications : (1) On admettra que la fonction $\theta \mapsto (\rho(\theta))^2 + 2(\rho'(\theta))^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)$ s'annule sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ exactement en $\theta_1 \simeq 0.37$, et qu'elle change de signe en ce point, et on donne $\theta_1 \simeq 3\pi/25$, $r(\theta_1) = 1.2$ et $r'(\theta_1) \simeq -2.4$.
(2) Avant de tracer la courbe, on tracera les cercles $C(O, 1)$ et $C(O, 2)$.

Exercice 3 ($\simeq$ 4 points) : Considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 77 = 0\}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Réduire l'équation définissant $\mathcal{E}$ en donnant tous les renseignements utiles :
∗ nouveau repère, nouvelle équation et nouvelles coordonnées,
∗ nom de la courbe obtenue,
∗ directions principales,
∗ sommet(s), foyer(s) et directrice(s) de la courbe,
∗ asymptotes éventuelles, centre éventuel,
∗ excentricité,
∗ un paramétrage possible,
∗ tracé de la courbe.

Exercice 4 ($\simeq$ 4.5 points) Soit c la courbe paramétrée définie par $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, \frac{t^2}{2})$.
a) Quel est le nom de cette courbe?
b) Calculer sa longueur entre $t = -2$ et $t = 2$. **Indications :** On rappelle que $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$, $(\cosh(x))^2 = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$, $\sinh' = \cosh$ et on donne les valeurs $\operatorname{argsinh}(2) \simeq 1.44$ et $\sinh(2\operatorname{argsinh}(2))/2 \simeq 4.47$.
c) Soit $\gamma : s \mapsto \gamma(s) := c(\varphi^{-1}(s))$ un paramétrage par abscisse curviligne de la trajectoire de c tel que $\gamma(0) = c(0) = 0$ et $s = \varphi(0)$.
∗ Donner les expressions de $c(t)$, $\overrightarrow{c'(t)}$, $\overrightarrow{c''(t)}$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$.
∗ Calculer $\overrightarrow{\gamma'(s)}$ et $\overrightarrow{\gamma''(s)}$ en $s = \varphi(t)$ en fonction de t et des quantités précédentes.
∗ Calculer $\overrightarrow{\gamma'(0)}$, $\overrightarrow{\gamma''(0)}$ puis donner la courbure $C(0)$ au point $c(0)$, le rayon de courbure $R(0)$, le vecteur unitaire $\vec{n}_0$ normal à la courbe au point $c(0)$ tel que $< \vec{n}_0, \overrightarrow{c''(0)} > \geq 0$ puis les coordonnées du centre de courbure $\Omega(0)$ (dans le nouveau repère).
∗ Tracer la courbe et le cercle de courbure (cercle osculateur) au voisinage de $c(0)$.