Examen 2ème session de Méthodes expérimentales - 6 septembre 2006 à 16h30

Les calculatrices sont INTERDITES.
Les étudiant-e-s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.
Il est INUTILE de recopier les ÉNONCÉS.
Il est recommandé de ne pas sortir en avance et de RELIRE sa copie.
Le barême indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours ($\simeq$ 2 points) : 1) Soit $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1. À l'aide de quelle formule calcule-t-on concrètement la longueur de c sur $[a,b]$?

2) Soit $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 paramétrée par abscisse curviligne. Comment définit-on la courbure de c au point $c(t)$, $t \in]a,b[$?

Exercice 1 ($\simeq$ 7 points) : Le but de l'exercice est l'étude de la courbe paramétrée en polaires par $\theta \in \mathbb{R} \mapsto 3 + 5\cos 4\theta$.

a) Dans quelle zone du plan se situe-t-elle?

b) Sur quel intervalle I suffit-il d'étudier la courbe ? Pourquoi ?

c) Étudier les variations de r sur I. Donner ses extrema. Quelle est la direction de la tangente en un maximum ou un minimum de r ?

d) En quel(s) point(s) la courbe passe-t-elle par le pôle? Quelle est son allure en ce(s) point(s) ?
Indication : On donne $\theta_1 = \frac{1}{4}\arccos(-3/5) \simeq 0,18\pi$, et on remarque que $\pi/8 \leq \theta_1 \leq \pi/5$.

e) Quels sont les points non biréguliers en dehors du pôle? Quelle est l'allure de la courbe en ce(s) point(s) ?
Indications :

$\ast$ Montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto -375x^2 + 270x + 809$ n'a pas de zéro dans $[-1,1]$.

$\ast$ Conclure l'étude des points non biréguliers.

f) Étudier les branches infinies et spirales de la courbe.

g) Tracer la courbe.

Exercice 2 ($\simeq$ 7 points) :
Dans le plan orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on note Δ la droite d'équation $x = 1$ et A le point de coordonnées $(1,1)$. On fait varier une droite $D(\theta)$ passant par O et d'angle $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$ avec l'axe des abscisses. Soit $P(\theta)$ le point d'intersection de la droite $D(\theta)$ avec Δ. La strophoïde de foyer O, de point double A et d'axe Δ est le lieu des points $M(\theta)$ de la droite variable $D(\theta)$ qui se situent *à gauche* de la droite Δ et tels que $P(\theta)M(\theta) = P(\theta)A$.

a) Trouver les coordonnées polaires du point $P(\theta)$, et calculer la distance $AP(\theta)$.

b) Donner un paramétrage en polaires $\theta \mapsto (r(\theta),\theta)$ de la courbe décrite par $M(\theta)$ lorsque θ varie dans $]-\pi/2,\pi/2[$.

c) Étudier les symétries éventuelles de la courbe.

d) $\ast$ Montrer que $\theta \mapsto r(\theta)$ est continue sur $]-\pi/2,\pi/2[$, et dérivable sur $]-\pi/2,\pi/4[\cup]\pi/4,\pi/2[$.

$\ast$ Calculer sa dérivée sur $]-\pi/2,\pi/4[\cup]\pi/4,\pi/2[$.

$\ast$ Calculer les limites à gauche et à droite de r' lorsque $\theta \to \frac{\pi}{4}^{\pm}$.

e) En déduire que $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^+} \vec{c'(\theta)} = (-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ (dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$) et $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^-} \vec{c'(\theta)} = (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, puis le fait que la courbe admet deux demi-tangentes distinctes en $\pi/4$.

f) $*$ Étudier les variations de r.

$*$ En particulier, montrer (à l'aide d'équivalents quand $\theta \to \pm\pi/2$) que

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} r(\theta) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} r(\theta) = -1.$$

$*$ En déduire que la courbe se referme à ses deux extrémités en $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$.

g) $*$ Calculer les limites de r' aux mêmes bornes.

$*$ En déduire les limites suivantes $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \vec{c'(\theta)} = (-1, -\frac{1}{2}) = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \vec{c'(\theta)}$.

h) $*$ À l'aide des variations de r montrer qu'il n'y a qu'un seul passage au pôle.

$*$ Étudier l'allure de la courbe en ce point.

i) On ADMET qu'il n'y a pas de point non birégulier sur $]-\pi/2, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.

j) Étudier les éventuelles branches infinies de la courbe.

k) Tracer la courbe.

Exercice 3 ($\simeq$ 5 points) : Étudier la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3 + 5t, 4t^2 - 1)$.

Indications : On donne les valeurs approchées $\sqrt{5/3} \simeq 1.3$, $\frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 8.6$, $17/3 \simeq 5.7$ et $8\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 10.3$.