

Examen de Méthodes expérimentales -1ère session - 6 Juin 2007

Les calculatrices sont INTERDITES. Les étudiant(e)s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.

Le barème indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours (4 points)

- Par quelle formule calcule-t-on la longueur d'une courbe paramétrée $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 ?
- Quelle est la courbure d'un cercle de rayon $r > 0$?
- Quelle est la courbure d'une droite ?
- Soit $c : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (\theta, r(\theta))$ une courbe paramétrée en coordonnées polaires de classe C^2 (r est deux fois dérivable). Supposons que la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)$ s'annule en changeant de signe au point θ_0 . Que peut-on en déduire sur l'allure de la courbe au point $(\theta_0, r(\theta_0))$?

Question de TP (1 point) : Comment tracer la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\theta, r(\theta) = 2 + 4 \cos(6\theta))$ à l'aide de Maple ?

Exercice 1 (7 points) : Soit

$$c : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (\theta, r(\theta) = 2 + 4 \cos(6\theta))$$

une courbe paramétrée en coordonnées polaires.

- Donner les 6 étapes du plan d'étude d'une courbe paramétrée en polaires.
- Étudier la courbe ci-dessus.

INDICATIONS : On admettra que la courbe n'admet pas de point d'inflexion, mais on indiquera sans calcul la méthode à suivre pour le savoir.

- Question bonus hors barème - (ne traiter cette question que si l'essentiel du sujet a été effectué)** Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto -140x^2 + 76x + 289$ ne s'annule pas sur $[-1, 1]$. En déduire que la courbe c n'admet pas de point d'inflexion.

Exercice 2 (6 points) : Soit c la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par

$$c : t \in D \mapsto (x(t) = \cosh(t), y(t) = \arctan t).$$

- Rappeler les cinq étapes du plan d'étude d'une telle courbe.
- Comment est définie la fonction \cosh ? On précisera :
 - * son domaine de définition,
 - * sa dérivée,
 - * l'allure de son graphe, et
 - * ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
- Mêmes questions avec la fonction \arctan .
- Quel est l'ensemble de définition D de la courbe c ?
- Faire l'étude complète de la courbe.

Exercice 3 (2 points) : Calculer la longueur de la courbe paramétrée $c : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$c(t) = \left(-\frac{4}{3}t^3 + t - 2, 2t^2 + 7\right).$$