

Feuille d'exercice 5. Semaines du 10 et du 17 mai

Étude métrique des courbes : longueur, abscisse curviligne, courbure, enveloppes, développées et développantes

Courbes rectifiables, longueurs

Exercice 1 On considère la suite des polygônes obtenus de la manière suivante : Le premier triangle

Figure 1:

est équilatéral, et on passe d'une étape à la suivante en ajoutant des petits triangles équilatéraux comme indiqué sur la figure.

- a) Calculez le nombre de côtés du polygône à l'étape n (pour tout entier $n \geq 1$), son périmètre, et sa surface, en expliquant les formules obtenues.
b) Trouvez la limite de ces trois quantités quand n tend vers $+\infty$. Qu'en pensez-vous ?...

Exercice 2 Calculez la longueur des courbes suivantes :

- la courbe paramétrée par $t \in [0, 1] \mapsto (3t, 3t^2)$
- la courbe définie en coordonnées polaires par $\theta \in [0, \pi] \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$.
- la courbe paramétrée par $t \in [0, \pi] \mapsto (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$,
- la courbe définie en coordonnées polaires par $\theta \in [0, \pi] \mapsto a(1 + \cos \theta)$ (cardioïde).

Abscisse curviligne, courbure, enveloppe, développée, développante

Exercice 3 Donnez un paramétrage par abscisse curviligne de l'arc paramétré $t \in [0, 2\pi] \mapsto (R \cos 3t, R \sin 3t)$.

Exercice 4 Calculez le rayon de courbure au sommet O de la parabole d'équation $x^2 = 2py$.

Exercice 5 a) Soit f la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur \mathbb{R} . On considère un cercle \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 tangent au graphe de f au point $O = (0, 0)$. Au voisinage de ce point, le cercle est-il situé au-dessous ou au-dessus du graphe de f ?

- b) Sur quel intervalle la réponse à la question précédente est-elle valide ?
c) Mêmes questions en un autre point du graphe, par exemple au point $(1, 1)$.
d) Mêmes questions en n'importe quel point du graphe de la fonction *cosinus hyperbolique*.
e) *Pour aller plus loin.* À l'aide de Maple, faire une animation montrant la famille des cercles tangents en un point donné.

Exercice 6 Déterminez le rayon de courbure en un point quelconque de l'ellipse \mathcal{E} paramétrée par $t \in [0, 2\pi] \mapsto (a \cos t, b \sin t)$. Calculez ces expressions aux sommets de l'ellipse.

Exercice 7 Déterminez le rayon de courbure en un point $M(\theta)$ de la spirale définie en polaire par $\theta \mapsto r(\theta) = ae^{m\theta}$.

Exercice 8 Déterminez le rayon de courbure de la lemniscate de Bernoulli définie en polaires par $r(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Calculez R au point $A(0)$, et en l'origine O (atteinte pour $\theta = ?$).

Exercice 9 On considère une bobine de fil circulaire, et on commence à dérouler le fil en le tenant par son extrémité, en le gardant tendu. Quelle est la trajectoire d'un point du fil? Même question si la bobine n'est plus circulaire.

Exercice 10 On considère l'ellipse définie par $t \in [0, 2\pi] \mapsto (a \cos t, b \sin t)$. Quelle est sa développée?

Exercice 11 On considère la cycloïde définie par $\theta \in \mathbb{R} \mapsto (\theta + \sin \theta, 1 + \cos \theta)$. Quelle est sa développée?