

Licence 1<sup>ère</sup> année (L1 S2)  
Faculté de Mathématiques et Informatique  
Université Picardie Jules Verne, Amiens

année 2006-2007

# Courbes Planes

« Méthodes expérimentales »

Barbara SCHAPIRA

31 janvier 2007

# Objectifs du cours

Voici les buts que j'essaie de me donner dans ce cours

1. Vous intéresser
2. Vous entraîner au calcul, mais dans un but précis et joli : obtenir le tracé d'une belle courbe
3. Vous faire apprendre des mathématiques bien entendu

Voici ce que vous devrez savoir faire à la fin du module :

1. Étudier une fonction d'une variable réelle de façon autonome (sans question intermédiaire) : définition, dérivées, variations, maxima et minima, zéros, graphe,...
2. Maîtriser les familles de fonctions usuelles : puissances, exponentielles et logarithmes, fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses, fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.
3. Savoir étudier et tracer une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes
4. Connaître les propriétés de base des coniques
5. Savoir étudier et tracer une courbe paramétrée en coordonnées polaires
6. Savoir calculer la longueur d'une courbe.

## Prérequis

Si les notions (du programme du secondaire et/ou du premier semestre de Licence première année) qui suivent ne vous sont pas familières, révisez les le plus tôt possible de manière à ne pas perdre pied dans ce cours. Le devoir 1 (pour la semaine du 19 février) sera également consacré à des révisions.

- Définition d'une fonction, de son graphe, de la composée de deux fonctions, de la réciproque (ou inverse) d'une fonction bijective.

- Les fonctions « usuelles » : polynômes, puissances, racines  $n$ -ièmes, exponentielles et logarithmes, fonctions trigonométriques et leurs réciproques, fonctions hyperboliques et leurs réciproques,...

- Notions de continuité et de dérivabilité. Savoir calculer la dérivée de n'importe quel produit/somme/composée de fonctions usuelles.

- Géométrie élémentaire dans  $\mathbb{R}^2$  : vecteurs, produit scalaire, repère orthonormé, coordonnées cartésiennes, vecteurs colinéaires, déterminants. Vous devez savoir écrire l'équation d'une droite donnée par un point et un vecteur directeur, ou par deux points, la distance d'un point à une droite, l'équation d'une droite normale à une autre, l'équation d'un cercle de centre et de rayon connus, l'équation d'un cercle passant par trois points non alignés connus.

- Transformations de  $\mathbb{R}^2$  : vous devez connaître les définitions des homothéties, symétries centrale, axiale, des translations et des rotations, et savoir écrire l'image d'un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  par l'une de ces transformations usuelles.

Cette liste n'est pas exhaustive, vous devez connaître les outils de mathématiques enseignés au lycée.

## L'alphabet grec

Beaucoup d'entre vous n'ont jamais fait de grec ancien. Or les mathématicien-ne-s usent et abusent des lettres grecques. Les voici donc, dans l'ordre, avec minuscule, majuscule, et nom.

$\alpha$ , $A$ , Alpha	$\beta$ , $B$ , Bêta
$\gamma$ , $\Gamma$ , Gamma	$\delta$ , $\Delta$ , Delta
$\varepsilon$ (ou $\epsilon$ ), $E$ , epsilon	$\zeta$ , $Z$ , zêta ("dzeta")
$\eta$ , $H$ , êta	$\theta$ $\Theta$ Thêta
$\iota$ $I$ iota	$\kappa$ $K$ Kappa
$\lambda$ $\Lambda$ lambda	$\mu$ $M$ mu
$\nu$ $V$ nu	$\xi$ $\Xi$ xi
$\omicron$ , $O$ , omicron ("omicrone")	$\pi$ $\Pi$ pi
$\rho$ $P$ rho	$\sigma$ $\Sigma$ Sigma
$\tau$ $T$ tau	$\upsilon$ $U$ upsilon
$\varphi$ (ou $\phi$ ) $\Phi$ Phi	$\chi$ $X$ Chi (prononcer "ki")
$\psi$ $\Psi$ psi	$\omega$ $\Omega$ omega.

# Chapitre 1

## Courbes en coordonnées paramétriques

### 1.1 Introduction, plan du cours

Dans ce cours, nous allons définir, puis apprendre à étudier les courbes dans le plan d'un point de vue mathématique. Historiquement, c'est un sujet de grand intérêt pour les mathématiciens depuis l'Antiquité, en particulier depuis l'étude des coniques (sections planes d'un cône) par Apollonius (voir chapitre 2). Les notions modernes de vitesse et d'accélération en un point d'une trajectoire émergent au Moyen Âge en Angleterre, et l'étude des courbes progresse et se développe jusqu'à nos jours.

Au-delà de cet aspect historique, les courbes constituent un outil majeur pour la compréhension des fonctions. Vous connaissez depuis le lycée les courbes définies comme graphes de fonctions. Rappelons la définition.

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (continue) d'une variable réelle, où  $D_f \subset \mathbb{R}$  désigne l'ensemble de définition de  $f$ . Le *graphe* de  $f$  est l'ensemble des points  $M$  du plan usuel  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(x, f(x))$ , avec  $x \in D_f$ . Intuitivement, il est clair que cet ensemble est une courbe dans le plan. L'étude de la fonction  $f$  permet de tracer son graphe, qui permet à son tour de mieux comprendre le comportement de  $f$ . Il y a d'ailleurs des fonctions en mathématiques qu'on ne peut pas définir explicitement par une formule simple, mais dont on sait tracer à peu près le graphe, ce qui permet de les étudier. Par exemple, il existe des équations différentielles qu'on ne sait pas résoudre explicitement, mais pour lesquelles on peut décrire tout de même le comportement des solutions et l'allure de leur graphe.

Les courbes les plus importantes en pratique sont peut-être celles qui apparaissent en mécanique comme trajectoires de points mobiles. Dans ce cas, la courbe est donnée par  $t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$ , où  $t$  désigne le temps et  $(x(t), y(t))$  est la position de la particule dans le plan à l'instant  $t$ . Inutile de préciser dans ce cas l'intérêt concret de savoir étudier ce type de courbes !

Dans ce cours, nous étudierons dans un premier temps les *courbes paramétrées* de cette façon (chapitre 1), de manière à les comprendre et savoir les tracer aussi bien que les graphes de fonctions.

Mais il existe des courbes dont on sait théoriquement qu'elles admettent un paramétrage, mais qu'on ne connaît pas forcément explicitement a priori. La courbe peut alors parfois être donnée par une *équation cartésienne*. Vous en connaissez déjà des exemples : équation de droite  $ax + by + c = 0$ , équation de cercle  $x^2 + y^2 = r^2 \dots$  Nous étudierons ces courbes sans paramétrage explicite connu a priori, ou encore courbes *définies implicitement* au chapitre 2. Un cas particulier important est celui des *coniques*, courbes célèbres depuis leur étude dans l'Antiquité par Apollonius, mais aussi d'un grand intérêt pratique (mouvement des planètes, lancer d'objet...) Nous les étudierons donc particulièrement en détail.

Une dernière situation intéressante en pratique est celle des courbes en *coordonnées polaires*. Plutôt que de décrire un point  $M(x, y)$  de la courbe par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , on donne sa distance  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  à l'origine  $O$  et l'angle  $\theta$  entre l'axe  $(Ox)$  et la demi-droite  $[OM)$ , ce qui suffit à déterminer sa position dans le plan. Les coordonnées polaires sont intéressantes dans certains cas, où elles permettent de décrire plus simplement une courbe. Nous étudierons les courbes définies à l'aide de ces coordonnées polaires au chapitre 3.

Pour finir, nous étudierons au chapitre 4 tout ce qui concerne l'*aspect métrique des courbes*. D'abord, nous verrons comment calculer la *longueur* d'une courbe, et comment changer le paramétrage d'une courbe pour obtenir une trajectoire parcourue à vitesse constante égale à 1 (paramétrage par l'*abscisse curviligne*). Nous étudierons également la notion de *courbure*, qui permet, autour d'un point d'une courbe, de dire si la courbe ressemble plus à une droite (courbure nulle) ou à un cercle de rayon  $r$  (courbure  $\frac{1}{r}$ ).

**Remarque 1.1.1** Les paragraphes en petits caractères peuvent être omis en première lecture. Ils ne seront pas nécessaires pour obtenir autour de la moyenne à l'examen, mais pourront quand même donner lieu à des questions, et leur lecture est très recommandée aux curieux-ses et à toutes celles et ceux qui souhaitent poursuivre des études mathématiques.

## 1.2 Définitions

On se place dans le plan euclidien usuel  $\mathcal{P}$ , muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ . Nous utiliserons les notions vues dans le secondaire de points, de vecteurs, de distance...

Rappelons que ce plan est souvent noté  $\mathbb{R}^2$  (notation des analystes), car la connaissance d'un point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  (notation des géomètres) est rigoureusement équivalente à celle de ses coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

La définition rigoureuse mais abstraite des notions ci-dessus sera vue au cours de votre cursus mathématique, en géométrie affine et/ou en algèbre linéaire.

**Définition 1.2.1** *Un arc paramétré plan, ou courbe paramétrée plane est la donnée d'une application continue  $c : I \rightarrow \mathcal{P}$ , qui à un paramètre  $t$  d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  associe un point  $M(t) \in \mathcal{P}$  de coordonnées  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Les applications  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont appelées fonctions coordonnées. La variable  $t \in I$  est le paramètre, et représente souvent le temps.*

**Exemple 1.2.2** Le graphe d'une fonction continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , est bien un arc paramétré par  $t \in I \mapsto (t, f(t))$ .

**Remarque 1.2.3** l'hypothèse de continuité est importante. Par exemple, la fonction  $f$  qui à un nombre rationnel  $x \in \mathbb{Q}$  associe  $f(x) = 1$  et à un nombre irrationnel  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  associe 0 n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ , et vous vous convaincrez aisément qu'on ne souhaite pas appeler son graphe une courbe!

**Définition 1.2.4** *Le support, ou image ou trajectoire de la courbe paramétrée est l'image  $c(I)$  de l'application  $c$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $M$  du plan tels qu'il existe un paramètre  $t \in I$  vérifiant  $M = c(t)$ .*

**Exemple 1.2.5** L'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$  est une courbe paramétrée dont l'image est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. L'application  $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$  est une courbe paramétrée différente dont l'image est également le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. La première courbe fait le tour du cercle une infinité de fois, alors que la deuxième le décrit une seule fois.

En particulier, *deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir la même image!*

Le point de vue cinématique, qui étudie le mouvement au cours du temps  $t$  d'un point mobile  $M(t)$  dans le plan, est un cas particulier important. La *description du mouvement* de  $M$  est la donnée de l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \in \mathcal{P}$  (c'est la courbe paramétrée par le temps). La *trajectoire* de  $M$  est l'image de cette application, c'est-à-dire l'ensemble des points  $M(t)$  du plan pour un certain instant  $t \in \mathbb{R}$ . Comme précédemment, notez que *deux mobiles ayant des mouvements différents peuvent avoir la même trajectoire!*

Nous allons traiter en détail un exemple célèbre, celui de la *cycloïde*, parfois appelée « roulette ».

**Exemple 1.2.6** On considère une bicyclette se déplaçant le long de l'axe  $(Ox)$  à vitesse constante  $v > 0$ . On veut étudier la trajectoire des points du vélo.

Pour les points du cadre, cette étude est immédiate : ils ont une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe  $(Ox)$ . Considérons un point  $M$  d'une roue du vélo.

Commençons par le cas où  $M$  est sur le bord de la roue. Notons  $v$  la vitesse de la bicyclette,  $C(t)$  la position du centre de la roue à l'instant  $t$ ,  $R > 0$  le rayon de la roue, et supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , le point  $C(0)$  a pour coordonnées  $C(0) = (0, R)$  et  $M(0) = (0, 2R)$ . Notons  $\theta(t) \in \mathbb{R}$  l'angle  $(Oy, \overrightarrow{C(t)M(t)})$ .

Lorsque la bicyclette avance, le centre de la roue parcourt une distance  $tv$  pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Cette distance est également celle parcourue par le bord de la roue sur le sol, soit  $R\theta(t)$ . On en déduit la relation :

$$tv = R\theta(t),$$

où  $R$  et  $v$  sont les constantes données dans l'énoncé. Pour trouver la position de  $M(t)$ , il suffit de remarquer que si  $O$  désigne l'origine du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , et  $S(t)$  le point de contact de la roue avec le sol à l'instant  $t$ , on a

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OS(t)} + \overrightarrow{S(t)C(t)} + \overrightarrow{C(t)M(t)} \quad (1.1)$$

$$= (tv, 0) + (0, R) + (R \sin \theta, R \cos \theta). \quad (1.2)$$

On en déduit aisément les coordonnées de  $M(t)$  au cours du temps :

$$M(t) = \left( tv + R \sin \frac{tv}{R}, R(1 + \cos \frac{tv}{R}) \right).$$

On décrit fréquemment le mouvement de  $M$  à l'aide du paramètre  $\theta$ , ce qui donne

$$M(\theta) = (R(\theta + \sin \theta), R(1 + \cos \theta)).$$

Pour trouver un paramétrage du mouvement d'un point  $N$  de la roue qui n'est pas sur le bord, mais à distance  $0 \leq r \leq R$  du centre  $C(t)$  de la roue, on modifie juste l'équation (1.1) en

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON(t)} &= \overrightarrow{OS(t)} + \overrightarrow{S(t)C(t)} + \overrightarrow{C(t)N(t)} \\ &= (tv, 0) + (0, R) + (r \sin \theta, r \cos \theta). \end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$N(t) = \left( tv + r \sin \frac{tv}{R}, R + r \cos \frac{tv}{R} \right), \quad \text{ou} \quad N(\theta) = (R\theta + r \sin \theta, R + r \cos \theta).$$

En mécanique du point, le paramétrage d'une courbe est naturel, puisqu'il s'agit de la description d'un mouvement au cours du *temps*. Mais en mathématiques, il n'y a pas de raison de privilégier un paramétrage par rapport à un autre. Dans l'exemple ci-dessus, le paramètre  $t$  est le bon paramètre cinématique, mais les deux paramètres  $t$  et  $\theta$  se valent du point de vue mathématique. On utilise d'ailleurs souvent  $\theta$  car l'expression  $\theta \mapsto M(\theta)$  est plus simple à étudier.

D'autre part, dans l'exemple 1.2.5 des deux paramétrages distincts du cercle, la différence essentielle est que la courbe paramétrée  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$  parcourt le cercle une infinité de fois alors que  $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$  le parcourt une seule fois. En particulier, la courbe paramétrée  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ , bien que *différente* des deux précédentes, ressemble plus à la deuxième courbe qu'à la première, car le cercle n'est parcouru qu'une fois. Cette notion intuitive de ressemblance est formalisée dans la définition suivante.

**Définition 1.2.7** *On dit que deux courbes paramétrées  $c : I \mapsto \mathbb{R}^2$  et  $\gamma : J \mapsto \mathbb{R}^2$  définissent le même arc géométrique si elles ne diffèrent que d'un changement de paramètre, c'est-à-dire s'il existe une application continue et bijective  $\varphi : I \rightarrow J$  dont la réciproque  $\varphi^{-1}$  est également continue et telle que pour tout  $t \in I$ , on a  $c(t) = \gamma(\varphi(t))$ .*

Dans l'exemple précédent, le changement de paramètre  $t \in [0, 2\pi] \mapsto \frac{t-\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  convient pour montrer que les courbes  $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$  et  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$  définissent le même arc géométrique.

En cinématique, les mouvements de deux points mobiles définissent le même arc géométrique si ces points se suivent sur exactement le même parcours, mais à des vitesses différentes.

**Remarque 1.2.8** En particulier, deux courbes paramétrées définissant le même arc géométrique ont même image ou même trajectoire. Mais la réciproque est fautive ! Il existe des courbes paramétrées ayant même trajectoire et définissant des arcs géométriques distincts, comme les deux paramétrages du cercle vus en 1.2.5.

### 1.3 Domaine d'étude

Il arrive très fréquemment que la courbe à étudier soit périodique et/ou ait des symétries. L'étude préliminaire de ses périodes et symétries permet de réduire le domaine d'étude et donc le temps passé à l'étudier !

**Exercice 1.3.1** Si la fonction  $x : t \mapsto x(t)$  est périodique de période  $T_1$  et  $y : t \mapsto y(t)$  est périodique de période  $T_2$ , montrez que la courbe paramétrée  $t \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$  est périodique de période  $T = \text{ppcm}(T_1, T_2)$ .

**Exemple 1.3.2** Considérons la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (\sin 2t, \cos 3t)$ .

- La première coordonnée est périodique de période  $\pi$ , et la deuxième de période  $\frac{2\pi}{3}$ . Par conséquent, il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , par exemple  $[-\pi, \pi]$ .
- La première coordonnée est une fonction impaire de  $t$  et la deuxième une fonction paire. Il suffit donc d'étudier la courbe sur  $[0, \pi]$  et on n'oubliera pas à la fin du tracé que la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(Oy)$ .
- On remarque ensuite que  $\sin 2(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -\sin 2t$  et  $\cos 3(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = -\cos 3t$ . La courbe paramétrée  $t \in [0, \pi] \mapsto M(t) = (\sin 2t, \cos 3t)$  est donc invariante par la symétrie centrale de centre  $O$ . On restreint donc l'étude à l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et on n'oubliera pas à la fin du tracé que la courbe est symétrique par la symétrie centrale de centre  $O$ .

**Remarque 1.3.3** Après avoir tracé la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on effectue les symétries ci-dessus **en partant de la fin** : d'abord la symétrie centrale de centre  $O$  puis la symétrie axiale d'axe  $(Oy)$ . En effet, sinon, on risque d'obtenir une courbe différente. Par exemple étudions  $t \in [-\pi, \pi] \mapsto (t, \cos t)$ . Elle est symétrique par rapport à  $(Oy)$ , on peut donc l'étudier sur  $[0, \pi]$ . Elle est symétrique par la symétrie centrale de centre  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , on peut donc l'étudier sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Après avoir tracé la courbe pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , si vous faites d'abord la symétrie centrale de centre  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , puis la symétrie d'axe  $(Oy)$ , vous obtiendrez bien le graphe de la fonction cosinus sur  $[-\pi, \pi]$ . En revanche, si vous faites les symétries dans l'autre sens, vous obtiendrez le graphe de cosinus ... sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , et ce n'est pas la courbe à étudier !

**Remarque 1.3.4** Les courbes du type ci-dessus sont appelées *courbes de Lissajoux*. Elles décrivent le mouvement d'une particule soumise à deux oscillations sinusoïdales orthogonales et peuvent être observées sur l'écran d'un oscilloscope.

Contrairement au cas des graphes de fonctions, il est difficile de donner des règles systématiques permettant de reconnaître les symétries de la courbe.

En effet, dans l'étude d'une courbe paramétrée par  $t \mapsto M(t)$ , le nombre réel  $t$  n'a rien à voir avec la position du point  $M(t)$ . D'ailleurs, très souvent il représente la variable de temps, qui n'a pas de lien systématique avec le point  $M(t)$ . Dans l'étude du graphe d'une fonction, les symétries sont plus facilement repérables car dans le paramétrage  $x \mapsto (x, f(x))$ , le paramètre  $x$  a une signification géométrique : c'est l'abscisse de  $M(x)$ .

Nous nous contenterons donc de présenter quelques cas fréquents en pratique. En général, les réductions du domaine d'étude sont dues à :

- Périodicité** : il existe  $p > 0$  tel que pour tout  $t \in I$  (avec  $t + p \in I$ ), on a  $M(t + p) = M(t)$ . Dans ce cas, on réduit l'étude à un intervalle de longueur  $p$ . Voir l'exemple 1.3.2 ci-dessus.
- Invariance par translation** : il existe un nombre  $t_0 > 0$  et un vecteur  $\vec{v} = (a, b)$  tels que pour tout  $t \in I$ , on a  $M(t + t_0) = M(t) + \vec{v}$ , où la notation *incorrecte* «  $M(t) + \vec{v}$  » désigne l'image de  $M(t)$  par la translation de  $\mathbb{R}^2$  de vecteur  $\vec{v}$ . Par exemple, la courbe paramétrée par  $t \mapsto (t + \cos 2\pi t, 2t - \sin 2\pi t)$  est invariante par la translation de vecteur  $\vec{v} = (1, 2)$ . La cycloïde (ex. 1.2.6) est également invariante par translation. Par quel vecteur ?

- c) **Parité des fonctions coordonnées** : Si les fonctions coordonnées sont toutes les deux paires, alors  $M(-t) = M(t)$  et il suffit d'étudier la courbe pour  $t \geq 0$ .  
 Si elles sont toutes les deux impaires, alors  $M(-t)$  est le symétrique de  $M(t)$  par la symétrie centrale de centre  $O$ .  
 Si  $t \mapsto x(t)$  est paire et  $t \mapsto y(t)$  est impaire, alors  $M(-t)$  est le symétrique de  $M(t)$  par la symétrie d'axe  $(Ox)$ .  
 Si  $t \mapsto x(t)$  est impaire et  $t \mapsto y(t)$  est paire, alors  $M(-t)$  est le symétrique de  $M(t)$  par la symétrie d'axe  $(Oy)$ .  
 Dans chacun de ces cas, on étudie la courbe pour  $t \geq 0$  et on fait les symétries à la fin pour la tracer complètement (voir l'exemple 1.3.2 ci-dessus).

- d) **Symétrie par rapport aux bissectrices** : Le symétrique de  $M(x, y)$  par rapport à la première bissectrice est le point  $M'(y, x)$ . Le symétrique de  $M(x, y)$  par rapport à la deuxième bissectrice est le point  $M'(-y, x)$ . Sur une courbe paramétrée, ceci peut se voir par exemple de la manière suivante.  
 Si, pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $x(b-t) = y(t)$  et  $y(b-t) = x(t)$ , la courbe  $t \in [a, b] \mapsto M(t)$  est invariante par la symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .  
 Si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $x(b-t) = -y(t)$  et  $y(b-t) = x(t)$ , il s'agit d'une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice  $y = -x$ .

**Exercice 1.3.5** Faites des dessins et donnez des exemples correspondant à chacune des situations ci-dessus. Par exemple, donnez un domaine d'étude le plus petit possible pour la courbe paramétrée par  $t \in \mathbb{R} \mapsto (3 \cos t + 2 \cos 3t, 3 \sin t - 2 \sin 3t)$ .

*Indication : la courbe est invariante par les symétries par rapport aux deux axes, aux deux bissectrices, et par la symétrie centrale de centre  $O$  !*

## 1.4 Étude locale de la courbe au voisinage d'un point $M(t_0)$

Abordons maintenant l'étude proprement dite de la courbe. On sait qu'autour d'un point  $M(t_0)$ , la courbe « ressemble » à sa tangente ... lorsqu'elle en a une ! La première question est donc de savoir comment définir la tangente à la courbe en un point, et en quels points existe-t-elle ? (voir paragraphe 1.4.1).

*Attention, une courbe n'a pas toujours de tangente en tout point, regardez  $x \mapsto (x, |x|)$  !* Il existe même des courbes continues et dérivables nulle part, comme le bord du flocon de Van Koch (voir feuille d'exercices 5).

Ensuite (paragraphe 1.4.2), on essaiera de connaître plus précisément l'allure de la courbe autour d'un point où elle a une tangente. Pour les graphes de fonctions, deux situations se présentent : soit la courbe reste d'un côté de la tangente (point « standart »), soit elle la traverse (*point d'inflexion*). Nous verrons que pour les courbes paramétrées, deux autres situations peuvent également se produire : les *points de rebroussement de première et de seconde espèce*.

Lorsque toute cette étude est menée en tout point, ou du moins en un certain nombre de points intéressants (points non biréguliers et extrema des fonctions coordonnées), il ne reste plus qu'à étudier les *branches infinies* de la courbe (paragraphe 1.5).

### 1.4.1 Vitesse- Tangente

Dans ce paragraphe, on considère une courbe paramétrée  $c : t \in [0, T] \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$ , et on note souvent  $M(t)$  au lieu de  $c(t)$  le point de coordonnées  $(x(t), y(t))$ .

Les notions de tangente et de vecteur dérivé d'une courbe paramétrée sont la version mathématique d'une notion cinématique que vous connaissez bien,

la vitesse (instantanée) d'un mobile. Rappelons quand même quelques définitions.

**Définition 1.4.1** La vitesse moyenne du point  $M$  entre  $t_0$  et  $t_1$  est égale à la distance parcourue entre  $t_0$  et  $t_1$  divisée par  $t_1 - t_0$ .

Le vecteur vitesse moyen de  $M$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  est le vecteur  $\frac{1}{t_1 - t_0} \overrightarrow{M(t_0)M(t_1)}$ . Il n'a d'intérêt que quand  $t_1 - t_0$  est petit et qu'on peut approcher la distance parcourue entre  $t_0$  et  $t_1$  par la distance  $d(M(t_0), M(t_1))$  (ce qui est faux en toute rigueur lorsque la trajectoire n'est pas rectiligne).

Le vecteur vitesse instantanée  $\vec{v}(t_0)$  à l'instant  $t_0$  est défini comme la limite (quand elle existe)

$$\vec{v}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M(t_0)M(t)}.$$

On le note souvent  $\dot{c}(t_0)$  en mécanique, et  $c'(t_0)$  en mathématiques.

Lorsque la courbe paramétrée  $t \in [0, T] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$  décrit un mouvement « réel », en général, le vecteur vitesse instantané existe.

Remarquez que  $\vec{v}(t_0)$  a pour coordonnées

$$\vec{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

La tangente géométrique à une courbe au point  $M(t_0)$ , quand elle existe, est la limite des droites  $(M(t_0)M(t))$  quand  $t \rightarrow t_0$ .

Cette définition très intuitive est légèrement problématique à votre niveau, car il faudrait définir ce qu'est une limite de droites. On préfère donc la définition de dérivée ci-dessous.

**Définition 1.4.1 bis** Le vecteur dérivé de la courbe en  $t_0$ , quand il existe, est défini par

$$c'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Il est bien défini si et seulement si les fonctions coordonnées  $x : t \mapsto x(t)$  et  $y : t \mapsto y(t)$  sont dérivables en  $t_0$ . On le note aussi  $\dot{c}(t_0)$  en mécanique.

Remarquez qu'il s'agit de la même définition que celle du vecteur vitesse instantanée. Il n'y a pas de différence entre les deux notions. On le notera désormais  $c'(t_0)$ .

**Exemple 1.4.2** Dans le cas particulier du graphe d'une fonction  $f$  dérivable en  $t_0$ , le vecteur dérivé au point  $t_0$  est le vecteur  $(1, f'(t_0))$  (démontrez-le).

**Proposition 1.4.3** Lorsque le vecteur dérivé  $c'(t_0)$  existe et est non nul, la tangente à la courbe est dirigée par  $c'(t_0)$ .

Si  $c'(t_0) = \vec{0}$ , si les fonctions coordonnées sont dérivables plusieurs fois et si  $p \geq 1$  est le plus petit entier (s'il existe !) tel que le vecteur  $c^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$  existe et est non nul, alors la tangente à la courbe en  $t_0$  est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul  $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ .

**Remarque 1.4.4** L'entier  $p \geq 1$  de la proposition ci-dessus n'existe pas toujours. Exemple :  $t \mapsto (1, e^{-\frac{1}{t^2}})$ .

**Remarque 1.4.5** Lorsque la courbe  $t \in I \mapsto c(t)$  n'est pas dérivable au point  $t_0$ , il peut arriver (pas toujours) qu'elle ait quand même une tangente géométrique. Par exemple, la courbe  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto (\sqrt{t}, \cos t)$  n'est pas dérivable en  $t_0 = 0$  mais a pourtant une tangente horizontale en ce point. En revanche, la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto (t \sin \frac{1}{t}, \cos t)$  n'admet pas de tangente en  $t_0 = 0$ .

Pour démontrer la proposition 1.4.3, nous aurons besoin de la formule suivante.

**Lemme 1.4.6 (Formule de Taylor-Young)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , au moins  $k - 1$  fois dérivable sur  $I$  (avec  $k \geq 1$ ), et (au moins)  $k$  fois dérivable en  $t_0 \in I$ . Alors, pour  $t \in I$  proche de  $t_0$ , on peut écrire

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}f^{(k)}(t_0) + (t - t_0)^k \varepsilon(t),$$

où  $\varepsilon$  est une fonction définie sur un voisinage de  $t_0$  qui vérifie  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) = 0$ , i.e.  $\varepsilon$  est une fonction continue en  $t_0$  telle que  $\varepsilon(t_0) = 0$ .

**Démonstration :** Démontrons cette formule dans le cas d'une fonction continue ( $k = 1$ ), dérivable en  $t_0$ . (La démonstration pour  $k$  quelconque est la même.) Par définition de la dérivée, on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} = c'(t_0).$$

Posons  $\varepsilon(t) = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} - c'(t_0)$  si  $t \neq t_0$ , et  $\varepsilon(t_0) = 0$ . Il est immédiat de vérifier que cette fonction tend vers 0 quand  $t \rightarrow t_0$ .  $\square$

**Démonstration de la proposition 1.4.3:** La première affirmation découle de la formule de Taylor-Young en  $t_0$  appliquée aux deux fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ , qui sont toutes les deux continues, et dérivables en  $t_0$ . Si  $\vec{v}(t_0)$  existe et est non nul, pour  $t$  proche de  $t_0$ , on a :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)(x'(t_0), y'(t_0)) + (t - t_0)\vec{\varepsilon}(t - t_0),$$

où  $\vec{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction dont les valeurs sont des vecteurs, qui vaut  $\vec{0}$  et est continue en 0 (c'est-à-dire que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}(t - t_0) = \vec{\varepsilon}(0) = \vec{0}$ ). Autrement dit, la droite  $(M(t)M(t_0))$  admet (par exemple) pour vecteur directeur  $(x'(t_0), y'(t_0)) + \vec{\varepsilon}(t - t_0)$ , et ce vecteur tend vers  $c'(t_0)$  quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Ceci démontre que la tangente à la courbe en  $t_0$  est dirigée par  $c'(t_0)$ .

La deuxième affirmation se démontre exactement de la même façon, en écrivant que

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (x(t_0), y(t_0)) + (t - t_0)^p(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) + (t - t_0)^p\vec{\varepsilon}(t - t_0).$$

$\square$

Un point  $M(t_0)$  en lequel le vecteur dérivé  $c'(t_0)$  existe et est non nul est appelé *point régulier*. Si  $c$  n'est pas dérivable au point  $t_0$ , ou si elle l'est mais que  $c'(t_0) = \vec{0}$ , on dit que  $M(t_0)$  est un *point singulier*. En pratique, la plupart des points d'une courbe paramétrée, sauf un nombre fini, sont réguliers.

*Attention, ceci n'est pas un théorème !*

Du point de vue cinématique, cela n'a pas d'intérêt de considérer un mouvement dont tous les points seraient singuliers : cela signifierait que le point  $M$  n'avance pas !

Mais on peut construire des fonctions mathématiques continues et dérivables nulle part, et donc des courbes n'ayant nulle part de vecteur dérivé !

**Proposition 1.4.7** Soit  $t \in I \mapsto c(t)$  une courbe paramétrée. En un point régulier  $M(t_0)$ , la tangente à la courbe, notée  $T(t_0)$  a pour équation :

$$y'(t_0).(x - x(t_0)) - x'(t_0).(y - y(t_0)) = 0.$$

**Démonstration :** En effet, un point  $M(x, y)$  appartient à la tangente à la courbe en  $t_0$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{M(t_0)M}$  et  $(x'(t_0), y'(t_0))$  sont colinéaires, ce qui équivaut au fait que leur déterminant soit nul :

$$\det \left( \overrightarrow{M(t_0)M}, (x'(t_0), y'(t_0)) \right) = y'(t_0).(x - x(t_0)) - x'(t_0).(y - y(t_0)) = 0.$$

Ceci donne bien l'équation (à retenir) ci-dessus.  $\square$

**Exemple 1.4.8** La tangente en  $t = \frac{\pi}{6}$  à la courbe paramétrée  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin 2t, \cos 3t)$  a pour équation  $y = -3x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Exercice 1.4.9** Trouvez une équation de la tangente en  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , puis  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , et  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  à la courbe paramétrée  $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$ .

## 1.4.2 Position de la courbe par rapport à sa tangente

On considère toujours une courbe paramétrée notée  $c : t \in I \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$  et on note souvent  $M(t)$  au lieu de  $c(t)$  le point de coordonnées  $(x(t), y(t))$

Pour éviter les difficultés, nous supposons dans ce paragraphe que les fonctions coordonnées  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sont infiniment dérivables sur  $I$ , mais en pratique, c'est quelque chose que vous devrez vérifier.

### Points biréguliers

**Définition 1.4.10** On dit qu'un point  $M(t_0)$  est birégulier si les deux vecteurs  $c'(t_0)$  et  $c''(t_0)$  sont non nuls et indépendants. Ceci est vrai si et seulement si  $\det(c'(t_0), c''(t_0)) \neq 0$ , ce qui équivaut encore au critère pratique suivant :

$$x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) \neq 0.$$

On se place alors dans le repère  $(M(t_0), c'(t_0), c''(t_0))$ . La formule de Taylor-Young donne l'approximation au second ordre suivante :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)c'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}c''(t_0) + (t - t_0)^2\vec{\varepsilon}(t - t_0),$$

où  $\vec{\varepsilon}$  est une fonction dont les valeurs sont des vecteurs, et telle que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}(t - t_0) = \vec{\varepsilon}(0) = \vec{0}$ . De cette formule, vues les variations de signe des fonctions  $t \mapsto (t - t_0)$  et  $t \mapsto (t - t_0)^2$  au voisinage de  $t_0$ , on déduit l'allure de la courbe au voisinage de  $t_0$  :

### Points réguliers non biréguliers

On se place ici dans le cas où  $c'(t_0) \neq \vec{0}$ ,  $c''(t_0) = \vec{0}$ , et on suppose qu'il existe un entier  $q \geq 3$  tel que  $c^{(q)}(t_0)$  est non nul et non colinéaire à  $c'(t_0)$ .

**Remarque 1.4.11** Si ce n'était pas le cas, cela signifierait que  $M(t)$  a une trajectoire quasiment rectiligne (vérifiez le!) au voisinage de  $t_0$  et dans ce cas la courbe est facile à tracer autour de  $t_0$ .

On se place alors dans le repère  $(M(t_0), c'(t_0), c^{(q)}(t_0))$ . La formule de Taylor-Young donne encore

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)c'(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!}c^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q\vec{\varepsilon}(t - t_0).$$

Dans ce cas, l'étude dépend du signe de l'application  $t \mapsto (t - t_0)^q$  autour de  $t_0$ , et donc de la parité de  $q$ . Deux cas sont possibles,  $M(t_0)$  est un *point d'inflexion* si  $q$  est impair, et la courbe admet un *méplat* en  $M(t_0)$  si  $q$  est pair :

### Cas général

Le raisonnement est le même que précédemment. On suppose qu'il y a au moins deux vecteurs dérivés non nuls et non colinéaires.

(Ce n'est pas toujours le cas, regardez  $t \mapsto (t, e^{-\frac{1}{t^2}})$  en  $t_0 = 0$ .)

On note  $p \geq 1$  le premier entier tel que  $c^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$ , et  $q > p$  le premier entier tel que  $c^{(q)}(t_0)$  est non nul et non colinéaire à  $c^{(p)}(t_0)$ . On se place dans le repère  $(M(t_0), c^{(p)}(t_0), c^{(q)}(t_0))$ .

Si tous les vecteurs dérivés  $c^{(k)}(t_0)$  de  $c$  en  $t_0$  sont nuls pour  $p < k < q$ , la formule de Taylor-Young donne :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!}c^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!}c^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q\vec{\varepsilon}(t - t_0),$$

où  $\vec{\varepsilon}$  vérifie  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}(t - t_0) = \vec{0}$ .

Comme précédemment, l'allure de la courbe dans le repère  $(M(t_0), c^{(p)}(t_0), c^{(q)}(t_0))$  dépend des variations de signe des applications  $t \mapsto (t - t_0)^p$  et  $t \mapsto (t - t_0)^q$ , et donc de la parité de  $p$  et  $q$ . On distingue donc 4 cas (à retenir avec des exemples) :

**Si  $p$  est impair et  $q$  est pair**, l'aspect de la courbe est « banal »,  $M(t_0)$  est *ordinaire*. Exemples :  $t \mapsto ((t - 1) \ln t, (t + 1) \ln t)$  en  $t_0 = 1$  (point birégulier  $p = 1$  et  $q = 2$ ),  $t \mapsto (t^3, \sin t^4)$  en  $t_0 = 0$  ( $p = 3$  et  $q = 4$ ).

**Si  $p$  est impair et  $q$  est impair**,  $M(t_0)$  est un *point d'inflexion*.

Exemples :  $t \mapsto (t^3, t + t^4)$  en  $t_0 = 0$  ( $p = 1$  et  $q = 3$ , cas le plus fréquent) ou  $t \mapsto (t + t^4, e^{t^5})$  en  $t_0 = 0$  ( $p = 1$  et  $q = 5$ ).

**Si  $p$  est pair et  $q$  est impair**, il s'agit d'un *point de rebroussement de première espèce*. Exemples :  $t \mapsto (t + \frac{1}{t}, t^2 - 2t)$  en  $t_0 = 1$  ( $p = 2$  et  $q = 3$ ),  $t \mapsto (t^5, 3t^2 + 2t^3)$  en  $t_0 = 0$  ( $p = 2$  et  $q = 5$ ).

**Si  $p$  est pair et  $q$  est pair**, il s'agit d'un *point de rebroussement de deuxième espèce*. Exemples :  $t \mapsto (\sin t^2, \sin t^4)$  en  $t_0 = 0$  ( $p = 2$  et  $q = 4$ ),  $t \mapsto (t(3 - 2t)(t - 1)^2, t - 1 + \frac{1}{t})$  en  $t_0 = 1$  ( $p = 2$  et  $q = 4$ ).

**Remarque 1.4.12** S'il existe  $p < k < q$  tel que  $c^{(k)}(t_0) \neq \vec{0}$ , alors il faut rajouter le terme  $\frac{(t-t_0)^k}{k!}c^{(k)}(t_0)$  dans la formule de Taylor. Mais par définition de  $q$ ,  $c^{(q)}(t_0)$  est le premier vecteur dérivé non nul et non colinéaire à  $c^{(p)}(t_0)$ , ce qui signifie que  $c^{(k)}(t_0)$  est lui colinéaire à  $c^{(p)}(t_0)$ . Comme  $(t-t_0)^k$  est négligeable devant  $(t-t_0)^p$  au voisinage de  $t_0$  quand  $k > p$ , on en déduit que ce terme en plus ne change rien localement à l'allure de la courbe.

### Étude pratique de ces points

Les points d'inflexion et les points de rebroussement ne sont jamais des points biréguliers. Ceci signifie que pour que la courbe ait un point d'inflexion ou un point de rebroussement de première ou de deuxième espèce en  $M(t_0)$ , il faut que  $M(t_0)$  ne soit pas birégulier, soit encore que  $c'(t_0)$  et  $c''(t_0)$  soient colinéaires. Insistons sur le fait que c'est une *condition nécessaire mais pas suffisante*. Cette condition se réécrit  $\det(c'(t_0), c''(t_0)) = 0$ , soit encore :

$$x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) = 0.$$

En un tel point  $M(t_0)$ , on pousse l'étude plus loin (calcul des dérivées successives) pour calculer  $p$  et  $q$ , et donc connaître l'allure de la courbe : point d'inflexion, point de rebroussement de première ou de deuxième espèce.

- Si  $c'(t_0) = \vec{0}$  ( $p > 1$ ), on va chercher a priori un point de rebroussement de première ou de seconde espèce en calculant les dérivées successives jusqu'à ce qu'on trouve les valeurs de  $p$  et  $q$ . *Attention : on n'a pas forcément de point de rebroussement ! On peut très bien avoir  $p = 3$  ! (voir les exemples plus haut).*

- Insistons sur le cas particulier relativement fréquent des points **réguliers non biréguliers** :  $c'(t_0) \neq \vec{0}$  ( $p = 1$ ). Dans ce cas,  $M(t_0)$  est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.

**Proposition 1.4.13** Une condition suffisante pour que  $M(t_0)$  soit un point d'inflexion est que l'application  $t \mapsto x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$  s'annule en changeant de signe en  $t_0$ .

**Démonstration :** Démontrons-le en supposant que  $x'(t_0) \neq 0$ , c'est-à-dire que la tangente à la courbe n'est pas verticale. Sinon, la démonstration qui suit s'adapte en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ .

La tangente à la courbe en  $M(t_0)$  a pour équation  $y'(t_0)(x - x(t_0)) = x'(t_0)(y - y(t_0))$ , soit encore  $y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$ . Le point  $M(t_0)$  est un point d'inflexion si et seulement si la courbe traverse sa tangente en  $M(t_0)$ . Or (faire un dessin) la différence d'ordonnée entre un point  $(x(t), y(t))$  de la courbe et le point de la tangente à la verticale du précédent vaut

$$\varphi(t) = y(t) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x(t) - x(t_0)) + y(t_0).$$

En particulier,  $M(t_0)$  est un point d'inflexion si et seulement si cette quantité s'annule en changeant de signe en  $t = t_0$ .

Maintenant, un simple tableau des variations de  $\varphi$  autour de  $t_0$  montre que si  $\varphi''(t)$  s'annule en changeant de signe en  $t_0$ , alors  $\varphi'$  est soit décroissante puis croissante soit croissante puis décroissante avant/après  $t_0$ , et donc de signe constant. La fonction  $\varphi$  est donc monotone au voisinage de  $t_0$ ; or elle vaut 0 en  $t_0$ , elle s'annule donc en changeant de signe en  $t_0$ . Le fait que  $\varphi''$  s'annule en changeant de signe autour de  $t_0$  est donc une *condition suffisante* pour que  $M(t_0)$  soit un point d'inflexion. Il reste à calculer  $\varphi''(t) = y''(t) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}x''(t)$  et à constater que  $\varphi''$  s'annule en changeant de signe en  $t_0$  si et seulement si  $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$  s'annule en changeant de signe en  $t_0$ . Ceci permet de conclure la démonstration.  $\square$

## 1.5 Branches infinies

Soit  $c : t \in I \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$  une courbe paramétrée définie sur l'intervalle  $I$ , et  $M(t)$  le point  $c(t)$ . Après avoir étudié la courbe localement, en « zoomant » autour des points intéressants, on s'intéresse à l'aspect global de la courbe, et en particulier à ses « départs à l'infini ». Remarquons que sur tout sous-intervalle fermé et borné de  $I$ , la courbe ne peut pas partir à l'infini. (Démontrez-le). La question ne se pose que si  $I$  est *semi-ouvert ou ouvert ou non borné inférieurement ou non borné supérieurement*. Dans tout ce paragraphe, on supposera être dans ce cas.

**Définition 1.5.1** Soit  $T \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  une borne de l'intervalle  $I$ . La courbe admet une branche infinie quand  $t \rightarrow T$  si la distance de  $M(t)$  à l'origine  $O$  du repère (et donc à n'importe quel point fixé) tend vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow T$ .

Il existe de nombreux types de branches infinies, et il est impossible d'en faire un catalogue complet. Voici quelques exemples ;

**Remarque 1.5.2** Ne confondez pas le fait que la courbe ait une branche infinie, et le fait que  $t$  tende vers  $\pm\infty$ . En effet, quand  $t \rightarrow \infty$ , il y a souvent des branches infinies, mais pas toujours. Par exemple, la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\arctan t, e^{-t^2})$  n'a aucune branche infinie, ni en  $+\infty$ , ni en  $-\infty$  !

Voici quelques situations que vous devez savoir reconnaître. Dans la suite du paragraphe, on suppose que  $x(t) \rightarrow +\infty$  ou  $y(t) \rightarrow +\infty$ , ce qui n'est pas le cas dans certains exemples « bizarres » comme les exemples de la figure ci-dessus.

### Existence d'asymptotes :

- Si  $x(t) \rightarrow +\infty$  (resp.  $x(t) \rightarrow -\infty$ ) et  $y(t) \rightarrow b \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet la droite (horizontale) d'équation  $y = b$  pour asymptote. Exemple :  $t \in [0, 1[ \mapsto (\frac{1}{1-t}, e^{t-3})$  en  $T = 1$ .
- Si  $x(t) \rightarrow c \in \mathbb{R}$  et  $y(t) \rightarrow +\infty$  (resp.  $y(t) \rightarrow -\infty$ ), la courbe admet la droite (verticale) d'équation  $x = c$  pour asymptote. Exemple :  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\arctan t, -\text{sh}t)$  en  $T = +\infty$ .
- Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  et si  $y(t) - ax(t) \rightarrow b \in \mathbb{R}$ , la courbe admet la droite d'équation  $y = ax + b$  pour asymptote. Exemple :  $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (\frac{1}{t^2} - 2, t^2 + \frac{3}{t^2})$  en  $T = 0$ .

Pour avoir une meilleure idée du comportement de la courbe, on aime savoir sa **position par rapport à son asymptote**.

- Si elle admet une asymptote verticale d'équation  $x = c$  quand  $t \rightarrow T$ , on veut savoir si la courbe est à gauche ou à droite de son asymptote quand  $t \rightarrow T$ . On étudie donc le signe de  $x(t) - c$  quand  $t \rightarrow T$ . Sur l'exemple ci-dessus, quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow \pi/2$  et  $x(t) - \pi/2 \leq 0$ . La courbe est donc à gauche de son asymptote quand  $t \rightarrow \infty$ .
- Si elle admet une asymptote non verticale, d'équation  $y = ax + b$  quand  $t \rightarrow T$ , on cherche à savoir si la courbe est au-dessus ou en dessous de son asymptote quand  $t \rightarrow T$ ; on étudie donc le signe de  $y(t) - ax(t) - b$ .

Sur l'exemple ci-dessus, on a  $y(t) - 3x(t) - 6 = t^2 \geq 0$  quand  $t \rightarrow 0$ , la courbe est donc au-dessus de son asymptote quand  $t \rightarrow 0$ .

### Absence d'asymptote :

Si on n'est pas dans l'un des cas ci-dessus, alors plusieurs cas se présentent :

- Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow +\infty$ , on dit que la courbe admet une branche parabolique d'axe  $(0y)$ . Exemple :  $t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto (\frac{2}{t}, \frac{3}{t^2})$  en  $T = 0$ .

- Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$ , on dit que la courbe admet une branche parabolique d'axe  $(0x)$ . Exemple :  $t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto (\frac{2}{t}, \frac{3}{t^2})$  en  $T = -\infty$ .

- Si  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  mais  $y(t) - ax(t)$  n'a pas de limite quand  $t \rightarrow T$ , on dit que la courbe admet une *direction asymptotique de pente a*. Exemple :  $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2 + \cos t, -t^2 + t)$  en  $T = +\infty$ .

- Les autres cas, très variés, ne sont pas catalogués.

**Remarque 1.5.3** On peut aller bien plus loin dans l'étude, et se demander par exemple si la courbe intersecte ses asymptotes, et où, et quand il n'y a pas de droite asymptote, on peut même chercher des paraboles asymptotes...

**Exemple 1.5.4** Soit  $c : t \in \mathbb{R}^* \mapsto (\frac{(t-1)^2}{t}, \frac{(t-1)^3}{t^2})$  une courbe paramétrée. La courbe admet des branches infinies éventuelles aux bornes des intervalles de son ensemble de définition, soit quand  $t \rightarrow \pm\infty$  ou  $t \rightarrow 0^\pm$ .

En  $-\infty$ ,  $x(t) \rightarrow -\infty$  et  $y(t) \rightarrow -\infty$ . La courbe admet bien une branche infinie. On vérifie que  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . De plus  $y(t) - x(t) = -1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$  d'où  $y(t) - x(t) \rightarrow -1$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . La droite d'équation  $y = x - 1$  est donc asymptote à la courbe en  $-\infty$ .

En  $+\infty$ , les calculs sont les mêmes et donnent le même résultat.

En  $0^-$ ,  $x(t) \rightarrow -\infty$  et  $y(t) \rightarrow -\infty$ . Il y a bien une branche infinie. On vérifie que  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow 0^-$ . La courbe admet donc une branche parabolique d'axe  $(Oy)$ . On peut donc chercher (n'anticipant sur le chapitre 2 pour la définition d'une parabole) si elle admet éventuellement une parabole asymptote d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ . Pour cela, on cherche  $a, b$  et  $c$  tels que  $y(t) - ax(t)^2 - bx(t) - c \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0^-$ . Un calcul montre que  $y(t) - x(t)^2 - x(t) + 1 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0^-$ ; la parabole d'équation  $y = x^2 + x - 1$  est asymptote à la courbe.

En  $0^+$ , les calculs sont les mêmes et donnent le même résultat.

## 1.6 Points doubles

Il peut être utile de chercher si la courbe se recoupe elle-même, et si oui, en quels points. Un point double est un point  $M$  tel qu'il existe *exactement* deux instants  $t_1 < t_2$  tels que  $M = c(t_1) = c(t_2)$ . Plus généralement, un point multiple est un point  $M$  tel qu'il existe plusieurs (au moins deux, éventuellement une infinité) instants  $t_1 < t_2 \dots < t_k$  tels que  $M = c(t_i)$ . Par exemple, la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$  n'a que des points multiples.

On cherche donc à savoir s'il existe  $t_1 < t_2$  tels que  $c(t_1) = c(t_2)$ , ie  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$ . Il s'agit donc de résoudre deux équations. On peut s'aider du tableau de variation des fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ . Par exemple, si l'une des deux est strictement monotone, on ne peut pas avoir de point multiple! (justifiez-le)

Nous ne nous attarderons pas sur ce type de problème, faute de temps pour tout approfondir.

## 1.7 Étude pratique d'une courbe paramétrée

Nous allons traiter ci-dessous un exemple pour illustrer ce paragraphe.

La morale d'une étude est la suivante : on cherche un paramétrage s'il n'y en a pas, puis on cherche à limiter la longueur de l'intervalle d'étude pour gagner du temps. Ensuite, on étudie les fonctions coordonnées pour repérer les points « particuliers » : extrema de  $x$  ou  $y$ , rebroussements, inflexions. On tracera la courbe au voisinage de ces points, et on interpolera le dessin entre ces points particuliers, à main levée.

Pour finir, si la courbe n'est pas bornée, avant d'être capable de la tracer, il vaut mieux connaître la façon dont elle part à l'infini. C'est le but de l'étude des branches infinies.

Une fois tout ceci fait, on peut tracer la courbe.

### Étape 0 : Trouver un paramétrage de la courbe..

Lorsqu'elle est définie comme description du mouvement d'un point mobile, ou comme solution d'un problème mathématique, par exemple un problème de lieux de points, ou un système d'équations différentielles, ou ... Cette étape n'est pas utile si vous connaissez un paramétrage de la courbe.

### Étape 1 : Déterminer un domaine d'étude le plus petit possible

On étudie la périodicité et les symétries de la courbe.

### Étape 2 : Faire le tableau de variation simultané des deux fonctions coordonnées

- On cherche d'abord quels sont les points où la courbe n'est pas dérivable.
- On fait ensuite le tableau de variation des deux fonctions coordonnées, avec sur la première ligne  $x'$  puis  $x$  puis  $y$  puis  $y'$  ce qui permet de lire  $x$  et  $y$  en même temps. Dans ce tableau, on note bien les *points singuliers* (tels que  $\vec{c}'(t) = \vec{0}$ , ie  $x'(t) = y'(t) = 0$ ), les *variations* et *extrema* des fonctions coordonnées  $x$  et  $y$ .

### Étape 3 : Étudier la courbe localement en tous les points qui ne sont pas biréguliers.

- On cherche d'éventuelles tangentes aux points non réguliers trouvés à l'étape précédente (dans ce cas vous serez guidés)
- On cherche les points non biréguliers (tels que  $\det(c'(t), c''(t)) = 0$ ).
- On pousse l'étude plus loin et on cherche les points d'inflexion et les points de rebroussement parmi les points non biréguliers. Cette étude peut mener à des calculs longs, à faire calmement. Dans les cas où les calculs sont difficiles à mener à bout, vous aurez soit des indications, soit l'aide de Maple.

### Étape 4 : Étudier les branches infinies

- On cherche en quel(s) point(s) la courbe admet des branches infinies, et on étudie leur type : existence éventuelle d'asymptotes, branches paraboliques ...
- Lorsqu'il y a une droite asymptote, on cherche la position de la courbe par rapport à son asymptote.

### Étape 5 : Tracer la courbe

Placer les points singuliers, les points d'inflexion, les points de rebroussements, les points correspondant aux extrema des fonctions coordonnées ainsi que les tangentes à la courbe en tous ces points. Tracer les asymptotes s'il y en a. Placer les points doubles s'il y en a. Tracer la courbe sur le domaine d'étude. Compléter le tracé par symétrie, translation ou périodicité (cf étape 1).

**Remarque 1.7.1** Il arrive qu'on parle de courbe paramétrée définie sur un domaine qui n'est pas un intervalle mais une union (finie ou infinie) d'intervalles (par exemple  $t \mapsto (\tan t, e^t)$ ). Or toute l'étude des paragraphes ci-dessus a été présentée en supposant que  $I$  est un intervalle. Dans le cas d'une union d'intervalles, la seule modification sera dans l'étude d'éventuelles branches infinies, qui pourront apparaître aux bornes de chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition.

**Exemple 1.7.2** Pour des exemples d'étape 0, nous renvoyons à l'exemple de la cycloïde traité en 1.2.6, ainsi qu'à la feuille d'exercices 2. Étudions la courbe paramétrée par

$$t \in \mathbb{R}^* \mapsto \left(t^2 + \frac{2}{t}, \left(t + \frac{1}{t}\right)^2\right).$$

Elle est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , nous l'étudierons donc sur les deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

Étape 1 : pas de symétries ou de périodicité apparente.

Étape 2 : les deux fonctions coordonnées sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ . On calcule  $x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2}$  et  $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$ . La dérivée  $x'$  s'annule en  $t = 1$  et est positive pour  $t \geq 1$  et négative sinon. La dérivée  $y'$  s'annule en  $t = 1$  et  $t = -1$ ; elle est positive si  $t \in [-1, 0[$  et  $t \geq 1$  et négative sinon. On fait le tableau de variations suivant :

Étape 3 : on recherche d'abord les points qui ne sont pas biréguliers. On voit immédiatement sur le tableau ci-dessus qu'en  $t_0 = 1$ ,  $c'(t_0) = \vec{0}$ , et c'est le seul point singulier de la courbe. Il pourrait exister des points réguliers non biréguliers (avec  $p = 1$  et  $q \geq 3$ ). Calculons donc

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \frac{4}{t^6}(t-1)^2(-3t^2 - 2t - 1).$$

Cette quantité s'annule si et seulement si  $t_0 = 1$ . Étudions donc l'aspect local de la courbe autour de  $M(1)$ . Un calcul donne  $x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3}$  et  $y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4}$ , d'où  $c''(1) = (6, 8) \neq \vec{0}$  et donc  $p = 2$ . De même, on calcule  $x^{(3)}(t) = -\frac{12}{t^4}$  et  $y^{(3)}(t) = -\frac{24}{t^5}$  d'où  $c^{(3)}(1) = (-12, -24)$ . Ce vecteur n'est clairement pas colinéaire à  $c''(1)$  (vérifiez-le), d'où  $q = 3$ . Le point  $M(1)$  est donc un point de rebroussement de première espèce.

Étape 4 : Il y a des branches infinies quand  $t \rightarrow \pm\infty$  et  $t \rightarrow 0^\pm$ .

En  $-\infty$ ,  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 1$  et  $y(t) - x(t) \rightarrow 2$ . La droite d'équation  $y = x + 2$  est donc asymptote. De plus,  $y(t) - x(t) - 2 = \frac{1-2t}{t^2} \geq 0$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . La courbe est donc au-dessus de son asymptote.

En  $+\infty$  les mêmes calculs donnent le même résultat, sauf que la courbe est alors au-dessous de son asymptote.

En  $0^-$ ,  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow -\infty$ , il y a donc une branche parabolique d'axe  $(Oy)$ . Une étude plus poussée montre que la parabole d'équation  $y = \frac{x^2}{4} + 2$  est asymptote à la courbe, c'est-à-dire que  $y(t) - \frac{x^2(t)}{4} - 2 \rightarrow 0$ . De plus,  $y(t) - \frac{x^2(t)}{4} - 2 = -t + t^2 - t^4/4 \sim -t \geq 0$  quand  $t \rightarrow 0^-$ . La courbe est donc au-dessus de la parabole asymptote.

En  $0^+$ ,  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow +\infty$ , il y a donc une branche parabolique d'axe  $(Oy)$ . La parabole d'équation  $y = \frac{x^2}{4} + 2$  est encore asymptote à la courbe, mais celle-ci est maintenant au-dessous de son asymptote.

Étape 5 : On trace la droite d'équation  $y = x + 2$ , la parabole d'équation  $y = \frac{x^2}{4} + 2$ , on place le point  $M(1) = (3, 4)$  et son vecteur tangent  $c''(1) = (6, 8)$ , et on dessine localement l'allure de la courbe autour de  $M(1)$ . On utilise ensuite la connaissance des branches infinies et le fait qu'il n'y a pas de point d'inflexion pour compléter le tracé. (On aurait pu éventuellement étudier d'abord la position de la courbe par rapport à ses asymptotes en les branches infinies.)

**Exercice 1.7.3** Faites la même chose pour  $t \mapsto (4 \cos^2 t \sin^3 t, \cos^2 t (3 - 2 \cos^2 t))$ .

## 1.8 Courbes de Bézier

Ces courbes paramétrées sont d'un grand intérêt pratique : ce sont elles qui sont utilisées dans un grand nombre de logiciels graphiques, essentiellement pour leur grande facilité de programmation.

Inventées par Bézier, ingénieur chez Renault, elles sont faciles à programmer via un algorithme récursif. Elles sont donc utilisées dans de nombreux logiciels graphiques, ainsi que dans certaines polices de caractères.

Rappelons d'abord que les *polynômes de Bernstein* sont définis par

$$B_k^n(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

La formule du binôme donne  $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$ . Les polynômes de Bernstein  $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$  forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Soient  $P_0, \dots, P_n$  des points du plan. On définit la *courbe de Bézier de points de contrôle*  $P_0, \dots, P_n$  par

$$B : t \mapsto \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

On peut vérifier que

- \* La courbe est de classe  $C^\infty$
- \* La courbe est située dans l'enveloppe convexe des points  $P_0, \dots, P_n$ .
- \* La courbe passe par  $P_0$  et  $P_n$ .
- \* La courbe a pour vecteur dérivé  $B'(0) = P_0 \vec{P}_1$  et  $B'(1) = P_{n-1} \vec{P}_n$ .

# Chapitre 2

## Courbes définies implicitement , Coniques

### Introduction

Il n'est pas très facile de définir ce qu'est une courbe en mathématiques. Il existe plusieurs définitions qui ne coïncident pas parfaitement : courbe paramétrée, courbe définie par une équation, ... mais malheureusement pas une seule notion unifiée. Dans ce chapitre, nous étudions les courbes définies par des équations, et en particulier les coniques, définies par des équations particulièrement simples, des équations polynomiales de degré 2. Ces courbes interviennent beaucoup en mécanique, et les TD seront orientés dans cette optique.

### 2.1 Courbes définies implicitement

#### 2.1.1 Généralités

Vous connaissez depuis longtemps des courbes définies par des équations. Par exemple, la courbe d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  est l'ensemble des points du plan à distance 1 de l'origine  $O$ , c'est-à-dire le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

Plus généralement, le cadre est le suivant. On considère une fonction *de deux variables*  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui à un couple  $(x, y)$  de réels associe le nombre  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ , ou plus géométriquement une fonction  $f$  qui à tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  associe un nombre  $f(M) = f(x, y)$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$ , l'ensemble d'équation  $f(x, y) = c$  est l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant  $f(x, y) = c$ .

Dans les cas qui nous intéresseront, il s'agira « clairement » d'une courbe, mais cela n'a rien d'évident a priori vue la définition d'une courbe.

Par exemple si  $f$  est la fonction constante égale à 1, l'ensemble d'équation  $f(x, y) = 1$  est tout le plan  $\mathbb{R}^2$  et l'ensemble d'équation  $f(x, y) = 0$  est l'ensemble vide. Si  $f$  est la fonction « distance à l'origine » définie plus haut ( $f(x, y) = x^2 + y^2$ ), l'ensemble d'équation  $f(x, y) = 0$  ne contient que le point  $O = (0, 0)$ . Aucun de ces ensembles n'est une courbe ! Il existe des outils mathématiques très efficaces, et valables également pour les fonctions de trois variables ou plus, qui permettent de déterminer si un ensemble d'équation  $f(x, y) = c$  est une courbe ou non. Mais ces outils dépassent le cadre de ce cours, et nous ne nous attarderons pas sur ce problème ici. Voyez si vous voulez le critère pratique ci-dessous.

#### Critère pratique pour déterminer si un ensemble d'équation donnée est une courbe

Fixons d'abord  $y$  et considérons  $f$  comme fonction de  $x$  seulement. Notons la  $f_y : x \mapsto f_y(x) := f(x, y)$ . Calculons la dérivée de cette fonction par rapport à  $x$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_y(x)$ . De même, fixons  $x$  et considérons  $f$  comme fonction de  $y$  seulement :

$f_x : y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$ . On calcule alors la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_x(y)$ . Le critère (condition suffisante) est le suivant : Soit  $L_c$  l'ensemble des points vérifiant  $f(x, y) = c$ . Si en tout point vérifiant  $f(x, y) = c$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , alors l'ensemble  $L_c$  est une courbe.

Exemple : On considère  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , et l'ensemble d'équation  $x^2 + y^2 = c$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ . Si  $c < 0$ , cet ensemble est vide. On calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ . Si  $c = 0$ , en un point tel que  $x^2 + y^2 = 0$ , on a  $x = y = 0$ , d'où  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ . Ce n'est donc pas une courbe (c'est en fait immédiat ici, car c'est un point !). Si  $c > 0$ , en un point tel que  $x^2 + y^2 = c$ , on a  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$ , d'où  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ . C'est donc bien une courbe (ça se « voit » car c'est

un cercle!)

En fait, ce critère pratique est une « traduction concrète » dans notre cadre d'un résultat que vous verrez plus tard, le *théorème des fonctions implicites*. Ce théorème assure que l'ensemble d'équation  $f = c$  est une courbe, sous certaines hypothèses portant sur la « dérivée » de  $f$ .

Les exemples suivants sont des exemples fondamentaux à connaître parfaitement

**Exemple 2.1.1** Le cercle de centre  $C(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $MC^2 = R^2$ . C'est l'ensemble d'équation  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .

Un cercle peut également être défini comme l'unique cercle passant par trois points  $A_1(a_1, b_1)$ ,  $A_2(a_2, b_2)$  et  $A_3(a_3, b_3)$  non alignés. Dans ce cas, on cherche  $x_0, y_0$  et  $R$  tels que les couples  $A_i(a_i, b_i)$  vérifient l'équation  $(a_i - x_0)^2 + (b_i - y_0)^2 = R^2$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ . Pour cela, il faudra résoudre un système de trois équations ( $1 \leq i \leq 3$ ) à trois inconnues  $x_0, y_0, R$ .

**Exemple 2.1.2** La droite passant par le point  $M_0(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $(-b, a)$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $\overline{M_0M}$  est colinéaire à  $(-b, a)$ , soit encore l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $(x - x_0)a = -(y - y_0)b$ . Autrement dit, c'est l'ensemble d'équation  $ax + by - (by_0 + ax_0) = 0$ .

**Exemple 2.1.3** La droite passant par deux points  $M_0(x_0, y_0)$  et  $M_1(x_1, y_1)$  est la droite passant par  $M_0$  et de vecteur directeur  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . On se ramène donc au cas précédent.

## 2.1.2 Lignes de niveau

En dehors des exemples classiques ci-dessus, les équations du type  $f(x, y) = c$  arrivent naturellement dans l'étude des fonctions de plusieurs variables. Le cadre est le suivant. On veut étudier une fonction  $f$  de deux variables  $x$  et  $y$  à valeurs réelles. C'est une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Un exemple familier aux adeptes de randonnée est celui de la fonction *altitude* : à un point de coordonnées  $(x, y)$  sur la terre, on associe son altitude  $h(x, y) \in \mathbb{R}$ . Contrairement aux fonctions d'une seule variable, on ne peut pas représenter son graphe dans le plan (il faudrait le dessiner en trois dimensions!) Pour se faire une idée de l'allure de la fonction, on trace ses *lignes de niveau*. C'est-à-dire que pour une valeur  $c$  donnée de la fonction, on cherche l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $f(x, y) = c$ . On peut représenter alors différentes lignes de niveau pour avoir une idée du comportement de  $f$ . C'est exactement ce qui est fait sur les cartes IGN, où les lignes de niveau de l'altitude nous donnent une idée du relief.

**Exemple 2.1.4** Les lignes de niveau de la fonction  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$  sont des cercles centrés en l'origine. Plus on s'éloigne de l'origine  $O$ , plus les valeurs de  $f$  sont grandes.

**Exemple 2.1.5** Les lignes de niveau de la fonction  $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{y}$  sont des droites. En effet,  $f(x, y) = c$  est l'équation de la droite de pente  $\frac{1}{c}$  passant par l'origine.

**Exercice 2.1.6** Donnez l'allure des lignes de niveau de la fonction  $f : (x, y) \mapsto e^{x+y}$ , et de la fonction  $g : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ .

Lorsqu'on veut étudier une fonction de deux variables  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on dispose d'un certain nombre d'outils. Les ordinateurs permettent de tracer son graphe « en 3D ». Sans ordinateur, on peut tracer comme ci-dessus un certain nombre de lignes de niveau pour se donner une bonne idée du relief.

La notion de dérivée est remplacée par celle de *dérivée partielle au point  $(x_0, y_0)$  dans la direction du vecteur  $\vec{v} = (u, v)$*  : il s'agit de la dérivée de la fonction  $t \mapsto \varphi_{\vec{v}}(t) = f(x_0 + tu, y_0 + tv)$  en  $t = 0$ . Elle permet d'étudier les variations de la fonction  $f$  autour de  $(x_0, y_0)$  le long de la droite de vecteur directeur  $v$ . La connaissance de toutes les dérivées partielles en tous les points et dans toutes les directions permet une bonne connaissance des variations de  $f$ .

Deux dérivées partielles sont particulièrement importantes, celles dans les directions des axes, ou plus précisément des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . On les note  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

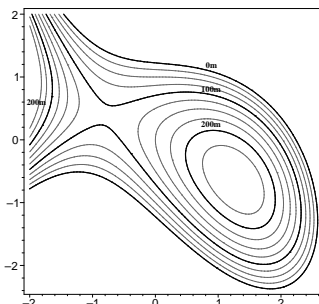
Le *vecteur gradient* de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  indique la *direction (vue du point  $(x_0, y_0)$ ) dans laquelle  $f$  augmente le plus*. Il est défini par

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right),$$

et a la propriété d'être orthogonal à la ligne de niveau de  $f$  passant par le point  $(x_0, y_0)$ , i.e. l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ . En particulier, c'est un vecteur normal à la tangente à cette ligne de niveau en  $(x_0, y_0)$ .

Tous ces outils seront étudiés plus en détail, et les propriétés ci-dessus démontrées dans votre premier cours de calcul différentiel. Nous allons en commencer l'étude principalement sur des exemples.

**Exercice 2.1.7** La figure ci-dessous représente le relief d'une presqu'île montagneuse. Placez sur la figure les maxima et minima locaux de l'altitude, ainsi que le lieu des points  $(x, y)$  où  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  s'annule. En ces points, quelle est la direction du gradient de  $f$ ? Même question pour le lieu des points en lesquels  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  s'annule.



### Étude d'une courbe définie comme ligne de niveau

Dans tout ce paragraphe, regardez les exemples  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ ;  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ .

On veut étudier une courbe définie par une équation  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$ , où  $c$  est une constante réelle.

Un vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M_0(x_0, y_0)$  est un vecteur dans la direction duquel  $f$  ne varie pas au point  $M_0$ .

**Définition 2.1.8** Plus précisément,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  est dit tangent à la courbe au point  $M_0$  s'il existe une courbe de classe  $C^1$  définie sur un voisinage de 0  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$  qui vérifie

1. Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\gamma(t) \in \mathcal{C}$
2.  $\gamma(0) = M_0$ ,
3.  $\gamma'(0) = \vec{v}$

Traduisons cela en un critère pratique. Les propriétés ci-dessus signifient que

1. Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $f(x(t), y(t)) = c$
2.  $(x(0), y(0)) = M_0(x_0, y_0)$ ,
3.  $\gamma'(0) = \vec{v} = (v_1, v_2)$

Si on dérive l'égalité 1, on obtient (ADMIS)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t) = 0.$$

Plutôt que de la démontrer, je vous recommande de tester cette fonction sur les exemples ci-dessus pour la comprendre. En particulier, en  $t = 0$ , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times v_2 = 0.$$

Autrement dit, le vecteur  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  est orthogonal au vecteur de coordonnées  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ . Ce vecteur est appelé *gradient de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$*  et noté

$$\nabla f(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

On peut démontrer réciproquement que tout vecteur orthogonal à  $\nabla f(x_0, y_0)$  est un vecteur tangent à la courbe au point  $(x_0, y_0)$ . Autrement dit, l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$  est

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), (X - x_0, Y - y_0) \rangle = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (Y - y_0) = 0$$

**Exercice 2.1.9** Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation  $x^2 - y^2 = 1$  au point  $(1, 0)$  puis au point  $(2, \sqrt{3})$ .

*Commentaire* Intuitivement, le vecteur gradient est le vecteur dans la direction duquel  $f$  varie le plus. Il indique la direction « la plus éloignée possible » de la tangente à une ligne de niveau, direction dans laquelle (par définition d'une ligne de niveau)  $f$  ne varie pas du tout.

## 2.2 Coniques

Les coniques tiennent leur nom du fait qu'on les obtient comme intersection d'un cône et d'un plan. À l'aide d'un dessin, on voit tout de suite les différentes sortes de coniques possibles :

### « Vraies » Coniques

- intersection du cône avec un plan « à peu près orthogonal » à l'axe du cône : on obtient une **ellipse**, et un cercle quand le plan est vraiment orthogonal à l'axe.
- intersection du cône avec un plan « à peu près parallèle » à l'axe du cône : on obtient une **hyperbole**.
- intersection du cône avec un plan parallèle à une *génératrice* du cône : on obtient une **parabole**.

### Coniques dégénérées :

-Si le plan passe par l'origine du cône, on peut obtenir un **point** (par exemple si le plan est orthogonal à l'axe), une **droite** si le plan est tangent au cône, ou l'**union de deux droites** par exemple si le plan contient l'axe du cône.

On étudie essentiellement les coniques non dégénérées mais il faut savoir que les autres existent.

Nous verrons en TD que les coniques sont des courbes qui apparaissent énormément en mécanique (mouvement des planètes et lois de Kepler, lancer d'un objet, ...)

### 2.2.1 Définition par une équation du second degré

Commençons ce paragraphe par une remarque : si on considère l'intersection du cône (vertical) de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$  (où  $\lambda$  est un paramètre fixé) avec le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , on doit résoudre un système de deux équations à trois inconnues. À l'aide de la deuxième équation, on peut éliminer  $z$  dans la première équation, ce qui donne

$$(ax + by + d)^2 = c^2 \lambda^2 (x^2 + y^2).$$

C'est une équation polynomiale de degré 2, qui décrit l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y, 0)$  projetés sur le plan horizontal (d'équation  $z = 0$ ) de l'intersection du cône et du plan.

Les coniques peuvent donc être définies par une équation du second degré. Par conséquent, on utilisera la définition suivante.

**Définition 2.2.1** Une conique est l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  qui vérifient une équation du second degré en les variables  $x$  et  $y$ .

Une équation quelconque du second degré est de la forme

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

où  $a \neq 0$ , ou  $b \neq 0$ , ou  $c \neq 0$  (si les trois coefficients étaient nuls, ce serait une équation du premier degré, et donc une équation de droite). Nous allons voir comment simplifier cette équation en changeant de repère, de manière à pouvoir l'étudier plus simplement ensuite.

## 2.2.2 Réduction de l'équation d'une conique

Nous allons démontrer le résultat suivant :

**Proposition 2.2.2** Soit  $C$  une conique d'équation  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Il existe un repère orthonormé  $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  dans lequel la conique a une équation de l'un des trois types suivants :  $AX^2 + BY^2 = C$  ou  $AX + BY^2 = C$  ou  $AX^2 + BY = C$ .

La différence entre cette proposition et toutes les simplifications que nous avons effectué plus haut est que le repère est orthonormé, ce qui facilite grandement l'étude géométrique de la conique.

**Remarque 2.2.3** Ce résultat est peu difficile, mais sa preuve classique nécessite un outil que vous ne connaissez pas encore : la théorie de la diagonalisation des applications linéaires. Plus précisément, en anticipant sur vos prochains enseignements d'algèbre linéaire et bilinéaire, la quantité  $(x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + cxy$  est une « forme quadratique » à laquelle est associée une « forme bilinéaire symétrique ». Le résultat qu'on utilise pour démontrer la proposition ci-dessus est le fait que les formes bilinéaires symétriques sont « diagonalisables en base orthonormée », ce qui permet d'écrire la forme quadratique  $ax^2 + by^2 + cxy$  sous la forme  $\alpha X^2 + \beta Y^2$  dans la nouvelle base orthonormée. Il suffit alors comme ci-dessus de changer l'origine du repère pour se ramener à l'une des formes d'équations voulues.

La preuve que nous donnerons ici est moins élégante : la prof part du principe qu'elle sait que le résultat est vrai pour trouver « à la main » une rotation qui donne la bonne base.

**Première étape :** Éliminer le terme en «  $xy$  » en changeant les vecteurs du repère pour se ramener à une équation du type  $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma X + \delta Y + \varepsilon = 0$ . C'est cette étape qui est la plus problématique à votre niveau. Si on vous le demande, vous serez guidé-e-s.

Toutefois, ce n'est pas très difficile. En effet, un tel nouveau repère est orthonormé, c'est donc l'image de  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  par une rotation d'angle  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Il s'écrit donc  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , avec  $\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$  (faites un dessin pour le voir).

Du point de vue de l'algèbre linéaire, ce qu'on est en train d'écrire, c'est qu'on a  $\vec{e}_1 = R_\theta \cdot (1, 0)$  et  $\vec{e}_2 = R_\theta \cdot (0, 1)$ , où  $R_\theta$  est la rotation de  $\mathbb{R}^2$  qui a pour matrice  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Il nous suffit donc de trouver  $\theta$  de sorte que dans le nouveau repère, le terme  $ax^2 + by^2 + cxy$  devienne  $\alpha X^2 + \beta Y^2$ . On n'a pas besoin de calculer  $\alpha$  et  $\beta$ , il nous suffit d'écrire que le terme en  $XY$  doit être nul. Or on voit facilement que  $x = \cos \theta X - \sin \theta Y$  et  $y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ . On remplace  $x$  et  $y$  par leur expression en fonction de  $X$  et  $Y$  dans  $ax^2 + by^2 + cxy$ , et on retient le coefficient du terme en  $XY$ , qui est  $(b - a) \sin 2\theta + c \cos 2\theta$ . Pour annuler ce terme en  $XY$  dans le nouveau repère, il suffit de choisir  $\theta$  tel que  $(b - a) \sin 2\theta + c \cos 2\theta = 0$ , soit encore si  $a \neq b$ ,  $\tan 2\theta = \frac{-c}{b - a}$ , et on écrit l'équation de la conique dans le nouveau repère. Vous remarquerez alors que si  $\theta$  est solution, alors  $\theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta + \pi$  et  $\theta + \frac{3\pi}{2}$  le sont aussi. Dessinez les repères correspondant à chacun de ces angles, et vous comprendrez pourquoi !

Les lecteurs-trices attentifs-ves vérifieront qu'il existe toujours une solution  $\theta$  à l'équation  $(b - a) \sin 2\theta + c \cos 2\theta = 0$  (sous des hypothèses raisonnables sur  $(a, b, c)$ ). Que se passe-t-il en particulier lorsque  $a = b$  ?

**Exercice 2.2.4** Utilisez cette méthode avec la conique d'équation  $x^2 + y^2 + 6xy + 12\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y + 36 = 0$ .

**Deuxième étape :** Éliminer si possible les termes en «  $X$  » et en «  $Y$  » dans l'équation  $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma X + \delta Y + \varepsilon = 0$  en changeant l'origine du repère pour se ramener à une équation de l'un des types suivants :  $AX^2 + BY^2 + C = 0$  ou  $AX^2 + BY + C = 0$ . Cette étape est facile et doit être maîtrisée.

- Cas où  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  : on écrit

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma X + \delta Y + \varepsilon = \alpha \left(X + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 + \beta \left(Y + \frac{\delta}{2\beta}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\alpha} - \frac{\delta^2}{4\beta} + \varepsilon.$$

On pose  $X' = X + \frac{\gamma}{2\alpha}$  et  $Y' = Y + \frac{\delta}{2\beta}$ , ce qui revient à considérer le nouveau repère  $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ , où la nouvelle origine  $O'$  a pour coordonnées  $O'(-\frac{\gamma}{2\alpha}, -\frac{\delta}{2\beta})$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . L'équation de la courbe dans ce nouveau repère est

$$\alpha X'^2 + \beta Y'^2 + \varepsilon - \frac{\gamma^2}{4\alpha} - \frac{\delta^2}{4\beta} = 0;$$

elle est bien de l'un des types souhaités.

- Cas où  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$  : On fait la même manipulation avec  $X$  seulement, en prenant  $X' = X + \frac{\gamma}{2\alpha}$ ,  $Y' = Y$  et donc  $O'(-\frac{\gamma}{2\alpha}, 0)$ . On obtient comme nouvelle équation

$$\alpha X'^2 + \delta Y + \varepsilon - \frac{\gamma^2}{4\alpha} = 0;$$

elle est bien de l'un des types souhaités.

- Cas où  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$  : on fait la même chose que ci-dessus en échangeant les rôles de  $X$  et  $Y$ .

En passant du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  au repère  $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ , nous nous sommes donc ramenés à l'étude de deux types d'équations :

$$AX^2 + BY^2 + C = 0 \quad \text{ou} \quad AX^2 + BY + C = 0.$$

Les coniques définies par le premier type d'équation sont dites *coniques à centre*, car elles sont symétriques par la symétrie centrale de centre l'origine du nouveau repère : si  $M(X, Y)$  est un point de la conique, alors le symétrique de  $M$ , de coordonnées  $(-X, -Y)$  est aussi un point de la conique.

On peut vérifier qu'une conique définie par le deuxième type d'équation n'a pas de centre de symétrie.

**Exemple 2.2.5** Traitons un exemple pour illustrer ce qui précède. Cherchons un repère dans lequel la conique d'équation  $5x^2 + 3y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$  admet une équation réduite de l'un des types ci-dessus.

**Première étape** : rien à faire.

**Deuxième étape** : On écrit  $5X^2 + \frac{14}{5}Y^2 + 3X - \frac{13}{5}Y - 1 = 5\left(X + \frac{3}{10}\right)^2 + 3\left(Y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{37}{15}$ . En posant  $O' = (-\frac{3}{10}, \frac{1}{3})$ ,  $X' = X + \frac{3}{10}$  et  $Y' = Y - \frac{1}{3}$ , dans le repère  $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ , on obtient l'équation réduite :

$$5X'^2 + 3Y'^2 = \frac{37}{15}$$

**Exercice 2.2.6** Même chose avec la conique d'équation  $x^2 - 3y^2 + 2x - 3y + 7 = 0$ .

Vue la proposition 2.2.2 ci-dessus, nous nous limiterons dans ce qui suit à l'étude des coniques des trois types ci-dessus dans un repère orthonormé.

### 2.2.3 Étude détaillée des coniques

Les coniques à connaître parfaitement sont « les plus jolies » : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Elles sont également très utiles en mécanique. Il faut simplement être conscient(e) du fait qu'une équation du second degré peut mener à d'autres courbes.

**Coniques à centre**  $Ax^2 + By^2 = C$

**Définition 2.2.7** Le centre d'une conique, lorsqu'il existe, est le centre de symétrie de la courbe. Dans un repère où l'équation de la conique est  $AX^2 + BY^2 + C = 0$ , le centre existe et est égal à l'origine du repère.

*Premier cas* :  $A \neq 0$  et  $B = 0$ , l'équation est alors  $Ax^2 = C$ .

Si  $\frac{C}{A} < 0$ , la conique est vide.

Si  $\frac{C}{A} = 0$ , la conique est la droite verticale d'équation  $x = 0$ .

Si  $\frac{C}{A} > 0$ , la conique est l'union des deux droites verticales d'équations respectives  $x = \frac{C}{A}$  et  $x = -\frac{C}{A}$ .

*Deuxième cas* :  $A = 0$  et  $B \neq 0$ , l'étude est la même en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ ; la conique est soit vide, soit une droite horizontale, soit l'union de deux droites horizontales.

*Troisième cas* :  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$  et  $C = 0$ , l'équation est  $Ax^2 + By^2 = 0$ .

Si  $AB > 0$ , la conique est réduite au point  $O = (0, 0)$ .

Si  $AB < 0$ , la conique est l'union des deux droites d'équations respectives  $y = \sqrt{\frac{A}{B}}x$  et  $y = -\sqrt{\frac{A}{B}}x$ .

Si  $ABC \neq 0$ , on se ramène à une équation du type  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ .

*Quatrième cas* : La conique d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  est vide.

*Cinquième cas* : L'ellipse est la conique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On peut l'étudier par exemple comme union de deux graphes,  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  et  $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Il s'agit d'un cercle déformé. On retrouve bien sûr un vrai cercle lorsque  $a = b$ . Le dessin est le suivant :

**Définition 2.2.8** Les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  sont appelés directions principales de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Plus généralement, les directions principales d'une ellipse d'équation quelconque sont les directions des vecteurs de base d'un repère orthonormé dans lequel l'ellipse admet une équation du type ci-dessus. (Ces directions existent d'après la proposition 2.2.2.)

**Lemme 2.2.9** L'équation de la tangente au point  $(x_0, y_0)$  à l'ellipse est

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Cette formule est facile à retenir, on applique la règle du dédoublement : on remplace  $x^2$  par  $x_0x$  et  $y^2$  par  $y_0y$  dans l'équation de l'ellipse.

**Démonstration** : La démonstration est facile à l'aide d'un paramétrage de l'ellipse (cf paragraphe 2.2.5), mais on peut la faire directement « à la physicienne » (ceci signifiant que les idées sont là mais la rigueur pas complètement car vous ne connaissez pas encore les outils de calcul différentiel nécessaires). Considérons un point  $M_0(x_0, y_0)$  de l'ellipse, et un autre point  $M(x_0 + dx_0, y_0 + dy_0)$  proche de  $M_0$  sur l'ellipse.

Lorsque  $M$  tend vers  $M_0$ , la droite  $(M_0M)$ , de vecteur directeur  $(dx_0, dy_0)$ , tend vers la tangente en  $M_0$  à la courbe. Or le fait que  $M_0$  et  $M$  soient des points de l'ellipse se traduit par

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 = \frac{(x_0 + dx_0)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + dy_0)^2}{b^2}.$$

Les termes  $dx_0$  et  $dy_0$  sont très petits et tendent vers 0 quand  $M$  tend vers  $M_0$ , on peut donc négliger les termes « d'ordre 2 »  $(dx_0)^2$  et  $(dy_0)^2$  dans l'égalité ci-dessus. On en déduit que

$$\frac{x_0 dx_0}{a^2} + \frac{y_0 dy_0}{b^2} \simeq 0,$$

et donc que le vecteur  $(dx_0, dy_0)$  est presque normal au vecteur  $(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$ . À la limite quand  $M$  tend vers  $M_0$ , ce dernier vecteur est donc normal à la tangente à la courbe. Elle a donc pour équation  $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = k$ , où  $k$  est une constante. On calcule facilement  $k$  car le point  $M_0(x_0, y_0)$  appartient à la tangente, d'où

$$k = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

et on obtient le résultat voulu. □

*Sixième cas* : L'hyperbole est la conique d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ou  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ .

Dans le premier cas, on peut l'étudier comme union de deux graphes  $x = a\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}$  et  $x = -a\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}$ . Dans le deuxième cas, c'est l'union des deux graphes  $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$  et  $y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$ . Lorsque  $a = b$ , on dit que l'hyperbole est *équilatère*. Les dessins sont les suivants :

Les *asymptotes* de l'hyperbole sont les droites d'équation  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

À l'aide de la même règle mnémotechnique de dédoublement, on retient le résultat suivant.

**Lemme 2.2.10** L'équation de la tangente au point  $(x_0, y_0)$  à l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  est

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \pm 1,$$

selon l'équation considérée.

La démonstration se fait de manière analogue à celle ci-dessus.

**Coniques sans centre**  $Ax^2 + By = C$ , avec  $A \neq 0$

*Premier cas* : Si  $B = 0$ , l'équation est  $Ax^2 = C$ , déjà vue ci-dessus.

*Deuxième cas* : la parabole est la conique d'équation  $y = ax^2 + c$ , que vous savez étudier comme graphe de fonctions. Le dessin est le suivant :

L'équation de la tangente au point  $(x_0, y_0)$  à la parabole est

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0).$$

On le démontre soit comme ci-dessus, soit en utilisant le fait que la courbe est paramétrée par  $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, ax^2 + c)$ . *Attention ! La règle du dédoublement ne s'applique plus.*

**Remarque 2.2.11** Pour les coniques du type  $Ax + By^2 = C$ , on échange les rôles de  $x$  et  $y$  dans le paragraphe ci-dessus.

## 2.2.4 Définition par foyer-directrice

Il existe une façon plus géométrique (et différente de celle d'Apollonius d'intersection d'un cône et d'un plan) de définir les coniques que par une équation du second degré. On peut en effet définir certaines coniques

comme lieu de points de la manière suivante.

Soit  $\mathcal{D}$  une droite (la *directrice*),  $F$  un point du plan (*foyer*),  $e \geq 0$  un nombre (*l'excentricité*) et  $p = ed(F, \mathcal{D})$  le *paramètre*. On définit l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  du plan tels que

$$\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})} = e,$$

où  $MF$  désigne la distance de  $M$  à  $F$ , et  $d(M, \mathcal{D})$  celle de  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire celle de  $M$  à son projeté  $H$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 2.2.12** *L'ensemble  $\mathcal{C}$  est une conique au sens du paragraphe ci-dessus.*

**Démonstration :** Une distance étant toujours positive ou nulle, l'égalité ci-dessus est encore équivalente à  $MF^2 = e^2 d(M, \mathcal{D})^2$ . Soient  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de  $F$ , et  $ax + by + c = 0$  une équation de  $\mathcal{D}$ . L'égalité ci-dessus est encore équivalente à

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

C'est une équation du second degré, qui définit donc bien une conique. □

On dit alors que  $\mathcal{C}$  est définie par *foyer et directrice*. On appelle *axe focal* de  $\mathcal{C}$  la perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $F$ , notée  $\Delta$  et *sommet(s)* le(s) point(s) de  $\mathcal{C}$  situé(s) sur l'axe focal. Notons  $K$  le projeté de  $F$  sur  $\mathcal{D}$ , i.e. l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$ . On a alors  $d(F, \mathcal{D}) = FK$  et  $p = eFK$ .

*Premier cas :  $e = 1$ . La conique est une parabole.*

Montrons le. D'abord, cherchons le(s) sommet(s) de  $\mathcal{C}$ . Il y a un seul point  $S$  de  $\Delta$  satisfaisant  $SF = SK$ , c'est le *milieu* du segment  $[FK]$ . Choisissons le comme origine, prenons  $\vec{i}$  colinéaire et de même sens que  $\overrightarrow{SF}$ , et  $\vec{j}$  orthogonal à  $\vec{i}$  de sorte que le repère soit orthonormé.

Par définition du paramètre, on a  $p = e.d(F, \mathcal{D}) = KF$ . Dans ce repère, le point  $F$  a pour coordonnées  $(\frac{p}{2}, 0)$ ,  $K(-\frac{p}{2}, 0)$ , la droite  $\Delta$  a pour équation  $y = 0$ , et la droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = -\frac{p}{2}$ . La conique a pour équation  $(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$ , soit encore

$$y^2 = 2px.$$

C'est bien l'équation d'une parabole.

*Deuxième cas :  $0 < e < 1$ . La conique est une ellipse.* Cherchons d'abord le(s) sommet(s). Un point  $S$  de  $\Delta$  tel que  $SF = eSK$  est plus proche de  $F$  que de  $K$ . Il appartient donc à la demi-droite  $[KF)$ . On vérifie aisément qu'il y a seulement deux possibilités, un point  $S \in [KF)$ , et un point  $S'$  sur la demi-droite  $[KF)$  privée du segment  $[KF]$ ; soit encore  $F \in [S'K]$ . On vérifie aisément que  $SF = eSK$  et  $S'F = eS'K$  d'où on déduit (avec  $p = e.FK$ ) que

$$SF = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad S'F = \frac{p}{1-e}.$$

Choisissons comme origine du repère le point  $O$  milieu de  $[SS']$ ,  $\vec{i}$  colinéaire et de même sens que  $\overrightarrow{SS'}$ , et  $\vec{j}$  de sorte que  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  soit un repère orthonormé direct. Notons  $SS' = 2a$  la distance entre les deux sommets. On déduit des expressions de  $SF$  et  $S'F$  que  $a = \frac{p}{1-e^2}$ . Le point  $S$  a pour coordonnées  $S(-a, 0)$  et  $S'(a, 0)$ . On a  $SF = \frac{p}{1+e} < OS = \frac{p}{1-e}$ , donc  $F \in [OS]$ . Notons  $c = OF$ . Le foyer  $F$  a alors pour coordonnées  $F(-c, 0)$  avec  $c < a$ , et  $c = OS - SF = \frac{ep}{1-e^2}$ .

Soit  $k = OK$ ; on a  $K(-k, 0)$ , avec  $k > a$ . Vues les relations obtenues précédemment, on a  $k = OK = OF + FK = c + \frac{p}{e} = \frac{ep}{1-e^2} + \frac{p}{e} = \frac{p}{e(1-e^2)}$ . En résumé, on a

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad c = \frac{ep}{1-e^2}, \quad \text{soit encore} \quad e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad k = \frac{p}{e(1-e^2)} = \frac{a^2}{c}.$$

La directrice a alors pour équation  $x = -\frac{a^2}{c}$ , le point  $O$  est le centre, et la conique a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \text{soit encore} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Remarquons que cette même ellipse peut également être définie à l'aide du foyer  $F'(c, 0)$  et de la directrice  $\mathcal{D}'$  d'équation  $x = \frac{a^2}{c}$ .

Remarquons également dans cette équation que lorsque  $c \rightarrow 0$ , i.e.  $\frac{ep}{1-e^2} \rightarrow 0$ , la conique « tend à devenir un cercle » de centre  $O$  et de rayon  $a^2$ .

Remarquons pour finir que dans cette définition de l'ellipse par foyer directrice, vu notre choix de repère, on a toujours  $a > b$ .

*Troisième cas :  $e > 1$ .* La conique est une *hyperbole*. Les points de l'hyperbole vérifient  $MF = ed(M, \mathcal{D}) > d(M, \mathcal{D})$ . En particulier, le(s) sommet(s) de l'hyperbole (i.e. les intersections de l'hyperbole avec  $\Delta$ ) sont plus loin de  $F$  que de leur projeté  $K$  sur  $\mathcal{D}$ . Elle admet donc deux sommets  $S$  et  $S'$ , tels que  $K \in [SF]$  et  $S' \in [KF]$ . Soit  $O$  le milieu de  $[SS']$  et  $2a = SS'$ . Le même type de calculs donne  $SF = \frac{p}{e-1}$ ,  $S'F = \frac{p}{e+1}$  et  $a = \frac{p}{e^2-1}$ . Le foyer  $F$  a pour coordonnées  $F(c, 0)$  avec  $c = OF = OS' + S'F = \frac{ep}{e^2-1} = ea > a$ .

Le point  $K$  vérifie  $eSK = SF$ , d'où  $SK = \frac{p}{e(e-1)}$ . Or  $SO = \frac{p}{(e+1)(e-1)} < SK$ , donc  $O \in [SK]$ . On en déduit que  $k = OK = SK - OS = \frac{p}{e(e^2-1)}$ , que  $K$  a pour coordonnées  $K(k, 0)$ , et la directrice a pour équation  $x = \frac{p}{e(e^2-1)} = \frac{a^2}{c}$ .

On choisit  $O$  comme origine du repère,  $\vec{i}$  le vecteur de norme 1 colinéaire à  $\overrightarrow{S'S}$  et  $\vec{j}$  orthogonal à  $\vec{i}$  de sorte que  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  forme un repère orthonormé. Les mêmes raisonnements que ci-dessus conduisent à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \text{soit encore} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Remarquons qu'avec cette définition par foyer et directrice, et vu notre choix de repère, on aboutit toujours à une équation du type  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (et non pas  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ).

Remarquons que l'hyperbole aurait pu être définie à l'aide du foyer  $F'(-c, 0)$  et de la directrice  $\mathcal{D}'$  d'équation  $x = -\frac{p}{e(e^2-1)} = -\frac{a^2}{c}$ .

**Remarque 2.2.13 (lien entre les deux définitions géométriques de ce chapitre des coniques)** Dans la définition des coniques comme sections planes d'un cône, on peut interpréter géométriquement le(s) foyer(s) et la directrice.

En effet, lorsqu'on intersecte un cône et un plan, il y a exactement deux sphères (dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole) ou une sphère (dans le cas de la parabole) qui soi(en)t tangente(s) intérieurement à la fois au cône et au plan. Le(s) point(s) de tangence avec le plan est (sont) le(s) foyer(s). Ces sphères sont appelées sphères de *Dandelin*, du nom d'un mathématicien belge. La directrice est plus difficile à visualiser, mais c'est possible.

D'autre part, il existe une autre façon de voir géométriquement les coniques dans l'« espace projectif » de  $\mathbb{R}^3$ , ce qui permet de les étudier toutes sans séparer de nombreux cas. Mais cette notion est totalement hors programme de premier cycle!

### 2.2.5 Paramétrage des coniques

Les coniques sont naturellement définies par des équations du second degré. Cependant, on peut également les voir comme trajectoires de courbes paramétrées.

En effet, une parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + b$  est le graphe de la fonction  $x \in \mathbb{R} \rightarrow ax^2 + b$ , elle est donc paramétrée par

$$c_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto (x, ax^2 + b).$$

Une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  peut être paramétrée par

$$c_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, b \sin t).$$

La branche de droite de l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (celle où  $x > 0$ ) est paramétrée par

$$c_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto (acht, bsht),$$

où on rappelle que le *sinus hyperbolique* est défini par  $\operatorname{sh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et le *cosinus hyperbolique* par  $\operatorname{ch}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

On peut également la paramétrer par

$$c_4 : t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \left( \frac{a}{\cos t}, b \tan t, \frac{b}{\cos t} \right).$$

La branche de gauche de l'hyperbole peut être paramétrée par  $c_5 : t \in \mathbb{R} \mapsto (-acht, bsht)$ , ou  $c_6 : t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \left( -\frac{a}{\cos t}, b \tan t, \frac{b}{\cos t} \right)$ .

**Démonstration :** Il n'y a rien de difficile, mais nous allons détailler énormément la rédaction pour éviter les confusions. Rappelons avant tout les relations (à connaître par coeur)  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ , et  $\frac{1}{\cos^2 x} =$ .

*Cas de la parabole :* On veut montrer que la parabole  $\mathcal{P}$  est paramétrée par la courbe  $c_1$ , ce qui signifie que les points de la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = ax^2 + b$  sont exactement les points de l'image  $c_1(\mathbb{R})$  de la courbe  $c_1$ . Nous devons donc montrer que les ensembles  $\mathcal{P}$  et  $c_1(\mathbb{R})$  sont égaux. Pour montrer que deux ensembles sont égaux, dans la plupart des cas, le plus simple est de procéder par *double inclusion*. C'est-à-dire qu'on montre d'abord que  $c_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}$ , puis que  $\mathcal{P} \subset c_1(\mathbb{R})$ . Ici, la démonstration de chaque inclusion est évidente, mais doit être faite.

L'image  $c_1(\mathbb{R})$  de la courbe est incluse dans  $\mathcal{P}$ . En effet, tout point  $M \in c_1(\mathbb{R})$  s'écrit  $M = c_1(t) = (t, at^2 + b)$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}$ , d'où  $y(t) = at^2 + b = a(x(t))^2 + b$ , donc  $M \in \mathcal{P}$ .

La parabole  $\mathcal{P}$  est incluse dans la trajectoire (l'image)  $c_1(\mathbb{R})$  de  $c_1$ . En effet, si  $M(x, y) \in \mathcal{P}$ , alors  $y = ax^2 + b$  d'où  $M = c_1(x)$ .

(Vous avez le droit d'aller bien sûr dans la démonstration de chaque inclusion, mais il est préférable de distinguer les deux inclusions.)

*Cas de l'ellipse :* Montrons que  $\mathcal{E} = c_2(\mathbb{R})$ . D'abord on a  $c_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$ , puisque si  $M = c_2(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , il est clair que  $\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = 1$ , donc  $M \in \mathcal{E}$ .

Réciproquement, montrons que  $\mathcal{E} \subset c_2(\mathbb{R})$ . Si  $M(x, y) \in \mathcal{E}$ , alors  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . En particulier, on a  $|\frac{x}{a}| \leq 1$ . Il existe donc  $\theta \in [0, 2\pi]$  tel que  $\cos \theta = \frac{x}{a}$ . On a envie de dire que  $M(x, y) = c_2(\theta)$ , mais ce n'est pas forcément vrai, on n'a pas forcément  $y = b \sin \theta$ . Remarquons que  $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta) = \frac{x}{a}$ , et que  $\sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$ . Donc l'un de ces deux nombres  $\sin \theta$  ou  $\sin(2\pi - \theta)$  est du signe de  $y$ . On choisit alors  $t = \theta$  ou  $t = 2\pi - \theta$  de sorte que  $\sin t$  soit du même signe que  $y$ . On a  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , d'où  $\sin^2 t = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ . Comme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , on a donc  $\sin^2 t = \frac{y^2}{b^2}$ . Comme  $\sin t$  et  $y$  sont de même signe, on a bien  $y = b \sin t$ , d'où  $M = c_2(t)$ .

*Cas de la branche droite  $\mathcal{H}^+$  de l'hyperbole  $\mathcal{H}$  :* On a  $\mathcal{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x > 0\}$ . Montrons que  $\mathcal{H}^+ = c_3(\mathbb{R})$ .

D'abord,  $c_3(\mathbb{R})$  est inclus dans  $\mathcal{H}^+$ . Pour le voir, il suffit d'utiliser la relation  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ , et le fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{cht} \geq 1 > 0$ .

Montrons que  $\mathcal{H}^+$  est inclus dans  $c_3(\mathbb{R})$ . La fonction  $\operatorname{sh}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est en particulier surjective, ie pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\operatorname{sht} = z$ . Donc il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\operatorname{sht} = \frac{y}{b}$ . Comme  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ , et  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , on a  $\frac{x^2}{a^2} = \operatorname{ch}^2 t$ . Comme  $M \in \mathcal{H}^+$ , on a  $x > 0$ , or  $\operatorname{cht} > 0$ , donc  $\operatorname{cht} = \frac{x}{a}$ . Finalement, on a bien  $M = c_3(t)$ .

Pour montrer que  $c_4(\mathbb{R}) = \mathcal{H}^+$ , on procède de la même manière. D'abord on montre que  $c_4(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}^+$  à l'aide de la relation  $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$  (savez-vous la démontrer, d'ailleurs?) Montrons que  $\mathcal{H}^+ \subset c_4(\mathbb{R})$ . On utilise le fait que  $\tan$  est surjective de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$  pour trouver un  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan t = \frac{y}{b}$ . On utilise alors le fait que la fonction  $\cos$  est positive sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pour conclure que  $\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos t}$ .  $\square$

**Exercice 2.2.14** Détaillez la preuve pour les paramétrages  $c_5$  et  $c_6$  de la branche gauche de l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Exercice 2.2.15** Paramétrez la parabole d'équation  $x = ay^2 + b$  et l'hyperbole d'équation  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

## 2.2.6 Interprétation optique des foyers

Rappelons d'abord que si un rayon lumineux arrive sur une surface lisse en faisant un angle  $\alpha_1$  avec la tangente, et qu'il repart après réflexion, et si on note  $\alpha_2$  l'angle du rayon réfléchi avec la tangente, alors  $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ . On a même  $\alpha_1 = \alpha_2$  si on précise bien la définition de ces angles.

Pour la parabole, un rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe focal sur la parabole se réfléchit en passant par le foyer. Autrement dit, c'est l'analogie de la propriété pour l'ellipse, avec un deuxième foyer qui se situerait « à l'infini » dans la direction de l'axe de la parabole. C'est pour cette raison que les antennes de télévision dites « paraboliques » ont une forme parabolique ! Pour que le signal télévision reçu soit concentré en un endroit. C'est également (surtout) le système utilisé sur les satellites pour capter de l'énergie solaire. Vous pouvez le démontrer en faisant les exercices ci-dessous (cf aussi la feuille 3).

**Exercice 2.2.16** Soit  $\mathcal{P}$  une parabole de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$ ,  $M \in \mathcal{P}$  un point quelconque de la parabole, et  $H$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$ . a) Faites un dessin.

b) Quelle est la nature du triangle  $MFH$  ?

c) Montrez que la médiatrice de  $[FH]$  est la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $M$ . Déduisez-en une méthode géométrique de construction des points et tangentes de  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 2.2.17** En utilisant l'exercice précédent, montrez qu'un rayon arrivant horizontalement sur la surface d'une parabole se réfléchit et repart en passant par le foyer de la parabole.

Pour l'ellipse, tout rayon lumineux passant par un des foyers et se réfléchissant sur le bord suivant les lois d'incidence classiques passe par l'autre foyer. Ceci a l'intérêt suivant. Si vous voulez depuis un point donné envoyer un signal et atteindre un autre point précis sans avoir de moyen de visée assez précis, vous pouvez construire une ellipse dont les deux foyers sont le départ et l'arrivée souhaités du signal. Très concrètement, si vous passez dans le métro parisien, vous constaterez que les stations (vues en coupe) sont en forme d'ellipse. En particulier, un adulte chuchotant face aux voies peut être entendu parfaitement par un autre adulte situé en face de lui sur l'autre quai.

Nous allons démontrer cette propriété à l'aide des exercices suivants.

**Exercice 2.2.18 (L'ellipse du jardinier)** Un jardinier a accroché une ficelle à deux piquets dans son champ, et en la tendant, il décrit une figure géométrique. Laquelle ? (La ficelle est plus longue que la distance entre les deux piquets.) (*Indication* : On introduira le milieu  $O$  des deux piquets, le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\vec{i}$  est colinéaire à l'axe des piquets, et la longueur  $2a$  de la ficelle.)

Vérifiez que si  $\mathcal{E}$  est une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  vérifie  $MF + MF' = 2a$ , où  $2a$  est la longueur du grand axe de l'ellipse.

**Démonstration** : a) Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble décrit par le bout de la ficelle. C'est encore l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , où  $F_1$  et  $F_2$  sont les deux piquets. Montrons que  $\mathcal{F}$  est une ellipse.

On va écrire les distances  $MF_1$  et  $MF_2$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Notons  $c = OF_1 = OF_2$ , d'où  $F_1(-c, 0)$  et  $F_2(c, 0)$ . On a  $MF_1^2 = (x + c)^2 + y^2$  et  $MF_2^2 = (x - c)^2 + y^2$ . Plutôt que de prendre la racine carrée, on élève la relation  $MF_1 + MF_2 = 2a$  au carré. Si  $M \in \mathcal{F}$ , on a donc

$$\begin{aligned} MF_1^2 + MF_2^2 &= 4a^2 \quad \text{soit} \quad 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 + 2MF_1.MF_2 = 4a^2 \\ &\quad \text{d'où} \quad MF_1.MF_2 = (2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2))^2 \quad \text{soit} \\ ((x + c)^2 + y^2)((x - c)^2 + y^2) &= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) \quad \text{d'où} \\ (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 &= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ . C'est l'équation d'une ellipse  $\mathcal{E}$  (car  $a > c$  par hypothèse). Autrement dit, on vient de montrer que tout point de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

En fait, on a aussi  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}$  est donc exactement l'ellipse  $\mathcal{E}$ . Pour le montrer, considérons un point  $M(x, y)$  de  $\mathcal{E}$ . Il vérifie  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ . On peut remonter les lignes de calcul en sens inverse jusqu'à la relation  $MF_1.MF_2 = (2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2))^2$ . La seule subtilité est le passage à la racine carrée. Les distances

$MF_1$  et  $MF_2$  sont bien sûr positives. De plus, en utilisant l'équation de  $\mathcal{E}$ , on voit que  $2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2) = a^2 - c^2 \frac{x^2}{a^2}$ . Cette quantité est positive car  $c^2 \leq a^2$  et  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ . Si on prend la racine carrée de la relation  $MF_1^2 \cdot MF_2^2 = (2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2))^2$ , on obtient donc

$$MF_1 \cdot MF_2 = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

On remonte encore le calcul jusqu'à  $(MF_1 + MF_2)^2 = 4a^2$ . On peut prendre la racine carrée (car les distances sont toujours positives), et on obtient enfin

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Pour finir, si  $\mathcal{E}$  est une ellipse quelconque de foyers  $F$  et  $F'$ , quitte à échanger  $x$  et  $y$ , on peut supposer que  $a \geq b$ , l'ellipse a donc pour équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ , avec  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{FF'}{2}$ . Tout point  $M$  de l'ellipse vérifie donc  $MF + MF' = 2a$ , et  $2a$  est la longueur du grand axe de l'ellipse, i.e. la distance entre les deux sommets  $S$  et  $S'$  (cf paragraphe 2.2.5).  $\square$

**Exercice 2.2.19** On souhaite montrer la propriété optique suivante. *Tout rayon lumineux issu d'un foyer d'une ellipse et se réfléchissant sur le bord de cette ellipse passe par l'autre foyer de l'ellipse.*

Rappelons la loi de réflexion. Soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire tangent à l'ellipse au point  $M$  de réflexion. Alors l'angle  $\alpha_1 = (\vec{u}, \overrightarrow{MF_1})$  entre la tangente et le rayon incident et l'angle  $\alpha_2 = (\vec{u}, \overrightarrow{MF_2})$  entre la tangente et le rayon réfléchi vérifient  $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ , soit encore  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ .

**Démonstration :** • Notons  $F_1$  et  $F_2$  les deux foyers. On veut montrer que si un rayon va de  $F_1$  à  $M$  et se réfléchit sur le bord de l'ellipse, alors il passera par  $F_2$ . Par définition, si le rayon incident fait un angle  $\theta_1$  avec la tangente, le rayon réfléchi fait un angle  $\theta_2$  avec la tangente tel que  $\sin \theta_2 = \sin \theta_1$ , soit encore  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ . Plutôt que de montrer que le rayon ainsi réfléchi passe par  $F_2$ , on va considérer le rayon  $MF_2$  et montrer qu'il fait un angle  $\pi - \theta_1$  avec la tangente, ce qui donnera le résultat voulu.

• Précisons les notations. Soit  $c : t \mapsto \vec{c}(t) = M(t)$  un paramétrage de l'ellipse (par exemple  $t \mapsto (a \sin t, b \cos t)$ , mais pas forcément), et  $\vec{u}(t) = \frac{\vec{c}'(t)}{\|\vec{c}'(t)\|}$  le vecteur unitaire tangent "dans le sens du mouvement" au point  $M$ . Soit  $\alpha_1(t) = (\vec{u}(t), \overrightarrow{M(t)F_1})$  et  $\alpha_2(t) = (\vec{u}(t), \overrightarrow{M(t)F_2})$ .

••• Dérivons la quantité  $F_1M(t)^2 = \langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \overrightarrow{F_1M(t)} \rangle$ . On a  $(F_1M(t)^2)' = 2F_1M(t) \cdot F_1M(t)' = \langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \overrightarrow{F_1M(t)} \rangle'$ . De même, on a  $2F_2M(t) \cdot F_2M(t)' = \langle \overrightarrow{F_2M(t)}, \overrightarrow{F_2M(t)} \rangle'$ .

•••• On montre facilement que  $\langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \overrightarrow{F_1M(t)} \rangle' = 2 \langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \overrightarrow{F_1M(t)} \rangle'$  (vous pouvez le démontrer en utilisant les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{F_1M(t)}$ ). De plus,  $\overrightarrow{F_1M(t)}' = (\overrightarrow{F_1O} + \overrightarrow{OM(t)})' = \overrightarrow{OM(t)}' = \vec{c}'(t)$ . On en déduit que  $2 \langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \overrightarrow{F_1M(t)} \rangle' = \langle \overrightarrow{F_1M(t)}, \vec{c}'(t) \rangle = 2F_1M(t) \|\vec{c}'(t)\| \cos(\overrightarrow{F_1M(t)}, \vec{c}'(t)) = 2F_1M(t) \|\vec{c}'(t)\| \cos(\pi + \alpha_1)$ .

De la même manière, on obtient  $2 \langle \overrightarrow{F_2M(t)}, \overrightarrow{F_2M(t)} \rangle' = 2F_2M(t) \|\vec{c}'(t)\| \cos(\pi + \alpha_2)$ .

••••• Les deux points ci-dessus donnent  $F_1M(t)' = \|\vec{c}'(t)\| \cos(\pi + \alpha_1)$  et  $F_2M(t)' = \|\vec{c}'(t)\| \cos(\pi + \alpha_2)$ . En dérivant la relation  $F_1M(t) + F_2M(t) = 2a$ , on obtient  $F_2M(t)' = -F_1M(t)'$ , d'où  $\cos(\pi + \alpha_2) = \cos(\pi + \alpha_1)$ . On en déduit que  $\alpha_2 = \pi \pm \alpha_1$ . Mais on vérifie aisément que les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont soit tous les deux dans  $[0, \pi]$ , soit tous les deux dans  $[0, 2\pi]$ . On en déduit finalement que  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ .  $\square$

**Exercice 2.2.20** Déduisez de l'exercice précédent une méthode géométrique (i.e. à la règle et au compas) de construction de la tangente en un point à l'ellipse.

**Démonstration :** Si  $M$  est un point de l'ellipse, le résultat de l'exercice précédent implique que la tangente en  $M$  à l'ellipse est la perpendiculaire en  $M$  à la bissectrice de l'angle  $(MF_1, MF_2)$ .  $\square$

Pour l'hyperbole, il est possible de parler de ce genre de propriété, mais il faudrait imaginer qu'un rayon passant par un foyer se réfléchit sur l'hyperbole, part à l'infini dans une certaine direction, revient depuis « l'autre côté » du plan dans cette même direction, et passe enfin par le deuxième foyer. Il est possible de donner un sens mathématique précis à ces élucubrations, mais ceci fait appel à la *géométrie projective*, théorie quasiment plus enseignée avant le troisième cycle.

## 2.2.7 Formulaire

**Exercice 2.2.21** Récapitulez toutes les données sur l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

# Chapitre 3

## Courbes en coordonnées polaires

### 3.1 Coordonnées polaires

On se place toujours dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , et on note  $M(x, y)$  pour un point  $M \in \mathcal{P}$  du plan de coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.1.1** Le couple  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  est un système de coordonnées polaires du point  $M \in \mathcal{P}$  si

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}.$$

Autrement dit, si  $\vec{u}_\theta$  désigne le vecteur  $u_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ , le couple  $(r, \theta)$  est un système de coordonnées polaires de  $M$  si et seulement si  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_\theta$ . L'origine  $O$  du repère est souvent appelée pôle.

**Remarque 3.1.2** Un même point  $M \in \mathcal{P}$  a un unique couple de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , mais une infinité de couples de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  ! En effet, si  $(r, \theta)$  est un système de coordonnées polaires, alors  $(r, \theta + 2n\pi)$  en est également un pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ainsi que  $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ . Sans parler du point  $O$  qui admet tout couple  $(0, \theta)$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , comme système de coordonnées polaires !

Si un point  $M$  admet le couple  $(r, \theta)$  comme coordonnées polaires, ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  vérifient

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

Réciproquement, si  $M \neq O$  a pour coordonnées cartésiennes le couple  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on peut choisir comme système de coordonnées polaires le couple  $(r, \theta)$  tel que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[ \quad \text{l'unique nombre de} \quad [0, 2\pi[ \quad \text{tel que} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

**Remarque 3.1.3** La façon ci-dessus de définir  $\theta$  peut vous dérouter, car nous n'avons pas de formule explicite donnant  $\theta$  en fonction de  $x$  et  $y$ , alors que  $\theta$  est pourtant bien défini uniquement à l'aide de  $x$  et  $y$ . Si on souhaite absolument une « formule », il faut remarquer la chose suivante. Si  $y \geq 0$ , alors  $\sin \theta \geq 0$ , d'où  $\theta \in [0, \pi]$ . Or la fonction  $u \in [-1, 1] \mapsto \arccos u$  est une bijection de  $[-1, 1]$  sur  $[0, \pi]$ . On a alors  $\theta = \arccos \frac{x}{r}$ .

Si au contraire  $y < 0$ , alors  $\theta \in ]\pi, 2\pi[$ . On remarque dans ce cas que  $\theta - \pi \in [0, \pi]$  et  $\cos(\theta - \pi) = -\frac{x}{r}$ . On pose alors  $\theta = \arccos(-\frac{x}{r}) + \pi$ . On pourrait également donner des « formules » pour  $\theta$  à l'aide des fonctions arcsin ou arctan, mais de la même façon que ci-dessus, il faudrait considérer plusieurs cas.

**Proposition 3.1.4** L'application  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$  est surjective. L'application

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

est bijective.

Autrement dit, l'application  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[ \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$  est « presque bijective », le seul problème se situant en  $O = (0, 0)$ .

## 3.2 Coordonnées sphériques et cylindriques

Ce paragraphe ne rentre pas tout à fait dans le cadre du cours qui est le *plan euclidien*. Toutefois, les coordonnées sphériques sont tellement utiles, en mathématiques comme en géographie, qu'il me semble difficile de ne pas en parler.

On se place dans l'espace euclidien à trois dimensions  $\mathcal{E}$ , muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On note  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}$  dans ce repère.

On appelle *système de coordonnées sphériques* du point  $M$  un couple  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  tel que  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ .

En géographie, l'angle  $\theta$  désigne la *latitude* d'un point du globe, et l'angle  $\varphi$  la *longitude*. Les conventions des géographes et des physiciens sont parfois légèrement différentes; par exemple, la latitude peut varier dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et certains notent  $\varphi$  la latitude et  $\theta$  la longitude... Nous utiliserons la convention présentée plus haut. Ces coordonnées sphériques sont bien sûr très utiles pour décrire des mouvements à la surface de la terre.

**Exercice 3.2.1** Donnez une équation en coordonnées sphériques de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Quelles sont les coordonnées du pôle nord? Du pôle sud?

On appelle *système de coordonnées cylindriques* du point  $M(x, y, z)$  un couple  $(\rho, \alpha, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times \mathbb{R}$  tel que  $(\rho, \alpha)$  est un système de coordonnées polaires de la projection de  $M$  dans le plan (horizontal) d'équation  $z = 0$ .

**Exercice 3.2.2** Donnez une équation en coordonnées cylindriques d'un cylindre de  $\mathbb{R}^3$  de hauteur infinie et de rayon  $\rho_0$ .

Comme leur nom l'indique, les coordonnées cylindriques sont tout à fait adaptées pour décrire des mouvements à la surface d'un cylindre, par exemple les mouvements dits *hélicoïdaux*.

**Exercice 3.2.3 (Mouvement hélicoïdal)** Les coordonnées cylindriques d'une particule mobile sont données par  $\rho(t) = R$ ,  $\alpha(t) = \omega t$  et  $z(t) = at$ , où  $R$ ,  $\omega$  et  $a$  sont des constantes. La trajectoire est, par définition, une *hélice*, enroulée sur le cylindre d'équation  $r = R$ . On appelle *génératrice* du cylindre toute droite de la surface du cylindre parallèle à l'axe de ce cylindre. Le *pas* de l'hélice est la distance séparant deux positions successives de la particule sur une même génératrice. Donnez une relation entre  $a$  et le pas de l'hélice. Déterminez les vecteurs vitesse  $c'(t)$  et accélération  $c''(t)$  en un point quelconque de la trajectoire.

## 3.3 Courbes en coordonnées polaires

### Définition

A priori, une courbe paramétrée en coordonnées polaires est une courbe de la forme  $t \in I \mapsto c(t) = (r(t), \theta(t))$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $(r(t), \theta(t))$  sont les coordonnées polaires du point  $c(t)$ . Toutefois, cette étude est trop compliquée en général, et nous nous limiterons à l'étude des *courbes en coordonnées polaires* du type

$$\theta \in I \mapsto c(\theta) = (r(\theta), \theta),$$

où  $\theta$  désigne à la fois l'angle et le paramètre. Plutôt que  $\theta \mapsto (r(\theta), \theta)$ , par abus de notation, nous écrirons souvent  $\theta \mapsto r(\theta)$ .

### Exemples

Commençons par les exemples les plus fondamentaux, à retenir parfaitement.

**Exemple 3.3.1** Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  a pour équation polaire  $\rho = r$ .

**Exemple 3.3.2** Une droite  $\Delta$  passant par l'origine  $O$  et de pente  $\tan \theta_0$  a pour équation polaire  $\theta = \theta_0$ . Une droite  $\Delta$  de pente  $\tan \theta_0$  (i.e. faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe des abscisses) passant par le point  $(l, 0)$  ( $l \neq 0$ ) est paramétrée en polaires par

$$r : \theta \in ]\theta_0 - \pi, \theta_0[ \mapsto \frac{d}{\sin(\theta_0 - \theta)},$$

où  $d$  est la distance entre cette droite  $\Delta$  et la droite parallèle à  $\Delta$  passant par l'origine.

Elle est également paramétrée en polaires par

$$r : \theta \in ]\theta_0, \theta_0 + \pi[ \mapsto \frac{d}{\sin(\theta - \theta_0)}.$$

Remarquons à ce propos que  $\tan \theta_0 = \tan(\theta_0 + \pi)$ . Et en effet,  $\theta_0$  est l'angle entre deux droites, la droite  $\Delta$  et l'axe  $(Ox)$ . Il n'est donc défini qu'à  $\pi$  près. C'est-à-dire que  $\theta_0 \pm \pi$  est aussi l'angle entre les deux droites  $\Delta$  et  $(Ox)$ . Si on remplace  $\theta_0$  par  $\theta_0 + \pi$  (ou  $\theta_0 - \pi$ ) dans les deux paramétrages ci-dessus, on remarque qu'ils sont échangés. Autrement dit, si on cherche à paramétrer une droite en polaires, on choisit l'angle  $\theta_0$  et celui des deux paramétrages qu'on préfère, et cela ne change rien.

**Démonstration :** Soit  $M(\rho, \theta)$  un point sur la droite  $\Delta$ , avec  $\theta \in ]\theta_0 - \pi, \theta_0[$ . Soit  $P$  le projeté de  $M$  sur la parallèle à  $\Delta$  passant par  $O$ . On a alors

$$\frac{MP}{OM} = \frac{d}{r(\theta)} = \sin(\theta_0 - \theta),$$

d'où le résultat. □

**Exemple 3.3.3** Une conique de foyer  $O$ , de paramètre  $p$ , et d'excentricité  $e$  a pour paramétrage polaire  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  (en supposant que la directrice est verticale et à droite de  $O$ ), et  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$  (en supposant que la directrice est verticale et à gauche de  $O$ )

**Démonstration :** En effet, par définition, si un point  $M(\rho, \theta)$  appartient à la conique, on a  $MO = ed(M, \mathcal{D})$  d'où (faire une figure!)  $\rho = e(\frac{p}{e} - \rho \cos \theta)$ , puis  $\rho(1 + e \cos \theta) = p$ , ce qui donne le résultat voulu. □

**Remarque 3.3.4** Si  $e = 0$ , on retrouve l'équation d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $p$ .

**Exercice 3.3.5** Montrez que le cercle de centre  $C(r_0, \theta_0)$  et de rayon  $R \geq r_0$  a pour paramétrage en polaires

$$\theta \in [0, 2\pi[ \mapsto r(\theta) = r_0 \cos(\theta_0 - \theta) + \sqrt{r_0^2 \cos^2(\theta_0 - \theta) + R^2 - r_0^2}.$$

*Indication :* vous pourrez (démontrer puis) utiliser la formule de Pythagore généralisée. Dans un triangle  $ABC$  de longueurs  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$ , et d'angle  $\alpha$  au sommet  $A$ , on a  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

**Remarque 3.3.6** Nous verrons plus tard (paragraphe 3.3.2) qu'un cercle de centre  $C \neq O$  et de rayon  $R < r_0 = OC$  ne peut pas être paramétré en coordonnées polaires lorsque le pôle est  $O$ .

## Repère mobile

Pour l'étude de ces courbes en polaires, nous aurons besoin de nous placer dans un repère orthonormé tournant avec  $\theta$ , le repère  $(M(\theta), \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  de la courbe au point  $M(\theta)$ , où

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

En dérivant chacune des coordonnées de  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{v}_\theta$  par rapport à  $\theta$ , on montre aisément que ces deux vecteurs vérifient

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \vec{v}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\theta,$$

où la notation  $\frac{d}{d\theta}$  désigne la dérivée par rapport à  $\theta$ .

### 3.3.1 Domaine d'étude

S'il n'est pas donné dans le problème, on détermine d'abord le domaine de définition de la fonction  $r : \theta \mapsto r(\theta)$ .

On cherche ensuite à étudier la courbe sur le domaine le plus petit possible, en exploitant les périodicité/symétries éventuelles.

#### Périodes

Le nombre  $T$  est une période de  $\rho$  si pour tout  $\theta$ , on a  $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$ .

Cas particulier : si  $\rho(\theta + T) = -\rho(\theta)$ , alors  $2T$  est une période de  $\rho$ .

Vous devez bien connaître les cas où  $T/2\pi \in \mathbb{Q}$ .

- Si  $\rho$  est périodique de période  $T = 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , on étudie la courbe sur un intervalle de longueur  $T$ , ce qui suffit pour obtenir toute la trajectoire. En effet,  $r(\theta + T) = r(\theta)$  et  $\theta + T = \theta + 2\pi$  d'où  $M(\theta + T) = M(\theta)$ .

Exemple :  $\rho(\theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta}$ .

- Si  $\rho$  est périodique de période  $T = 2\pi \frac{p}{q}$ , avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , alors on étudie la courbe sur un intervalle de longueur  $T$ , puis on complète le tracé en effectuant les  $q - 1$  rotations de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2k\pi}{q}$  avec  $1 \leq k \leq q - 1$ . En effet, si  $r(\theta + T) = r(\theta)$ , alors  $M(\theta + T)$  est l'image de  $M(\theta)$  par la rotation d'angle  $T$ , et comme  $T = 2\pi \frac{p}{q}$ , au bout de  $q - 1$  rotations du tracé sur  $[0, T]$ , on a tout le tracé, et la  $q$ -ième rotation est l'identité.

Exemple :  $\rho(\theta) = \sin \frac{7\theta}{3}$ .

Cas particulier :  $T = \pi$ , et  $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ . La courbe est invariante par la symétrie centrale de centre  $O$ .

Exemple :  $\rho(\theta) = \sin(2\theta)$ .

- Si  $\rho$  est périodique de période  $T$  telle que  $\frac{T}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ , la courbe est intraçable!

Exemple :  $\rho(\theta) = 1 + \cos \sqrt{2}\theta$ . Dans ce cas, l'ensemble des points de la trajectoire est même dense dans la couronne bornée par les cercles de rayon  $\min \rho$  et  $\max \rho$ . Dans l'exemple ci-dessus, la courbe est dense dans le disque de centre  $O$  et de rayon 2. Ceci signifie que pour tout point  $M$  du disque et quelle que soit la précision  $\varepsilon > 0$  fixée, il existe un point  $(\rho(\theta), \theta)$  de la courbe à distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $M$ .

**Démonstration :** Démontrons cette propriété dans le cas de l'exemple donné ci-dessus. Soit  $P$  un point de coordonnées polaires  $(\rho_0, \theta_0)$ , avec  $\rho_0 \geq 0$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ . Un point  $M(\theta)$  de la courbe est proche de  $P$  (à  $\varepsilon$  près) si et seulement si  $\theta$  est proche de  $\theta_0$  modulo  $2\pi$ , et  $\rho(\theta)$  est proche de  $\rho_0$  (à  $\varepsilon$  près).

La fonction  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \rho(\theta)$  est surjective de  $\mathbb{R}$  dans l'intervalle  $[0, 2]$  (car la fonction cosinus est surjective de  $\mathbb{R}$  dans  $[-1, 1]$ ). On peut donc trouver  $\theta_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $\rho(\theta_1) = \rho_0$ . Le point  $M(\theta_1) = (\rho(\theta_1), \theta_1) = (\rho_0, \theta_1)$  est donc sur le même cercle que le point  $P$ . Mais il n'a pas de raison d'être proche de lui, puisque  $\theta_1$  n'a aucune raison a priori d'être proche de  $\theta_0$  modulo  $2\pi$ .

On va chercher un point  $M(\theta)$  proche de  $P$  sous la forme  $M(\theta) = M(\theta_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{2}})$ . Si  $\theta = \theta_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$ , on a bien sûr  $\rho(\theta) = \rho(\theta_1) = \rho_0$ . Il reste à trouver  $k \in \mathbb{Z}$  de sorte que  $\theta_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$  soit proche de  $\theta_0$  modulo  $2\pi$  (à  $\varepsilon$  près). Autrement dit, on cherche  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $\frac{k}{\sqrt{2}} \simeq \frac{\theta_0 - \theta_1}{2\pi} + n$  (à  $\varepsilon$  près). On peut supposer que  $\frac{\theta_0 - \theta_1}{2\pi} \in [0, 1[$  (quitte à modifier un peu  $\theta_1$ ). On cherche donc un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{k}{\sqrt{2}} - E(\frac{k}{\sqrt{2}}) \simeq \frac{\theta_0 - \theta_1}{2\pi} \in [0, 1[$  (à  $\varepsilon$  près).

On peut trouver un tel  $k \in \mathbb{Z}$ , car la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \frac{n}{\sqrt{2}} - E(\frac{n}{\sqrt{2}})$  est dense dans  $[0, 1[$ , c'est-à-dire que pour toute précision  $\varepsilon$  fixée, on peut approcher n'importe quel nombre de  $[0, 1[$  à la précision  $\varepsilon$  par un terme de la suite. Nous admettrons cette affirmation, qui n'est pas très difficile, mais dont la démonstration mènerait trop loin.  $\square$

#### Symétries :

En coordonnées polaires comme en coordonnées cartésiennes, on ne détecte en général que les symétries centrales et les symétries axiales d'axe passant par l'origine. Les autres se repèrent a posteriori en observant l'allure de la courbe.

- S'il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\theta$ , on ait  $\rho(\omega - \theta) = \rho(\theta)$ , la courbe est invariante par la symétrie d'axe d'équation  $\theta = \frac{\omega}{2}$ .

Exemples :  $\theta \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \mapsto \rho(\theta) = \frac{9}{5 + 4 \cos(\frac{3\theta}{2})}$ ,  $\theta \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \mapsto \rho(\theta) = 1 + \frac{1}{1 + \sin \theta \cos \theta}$ .

- S'il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\theta$ , on ait  $\rho(\omega - \theta) = -\rho(\theta)$ , la courbe est invariante par la symétrie d'axe d'équation  $\theta = \frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$ .

Exemples :  $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \mapsto \rho(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ ,  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \rho(\theta) = \ln |\tan \theta|$ .

**Exercice 3.3.7** Détaillez la démonstration des points ci-dessus.

### 3.3.2 Étude locale en un point distinct de l'origine

Dans tout ce paragraphe, l'application  $\theta \in I \mapsto \rho(\theta)$  est supposée dérivable autant de fois que nécessaire, et on note  $M(\theta)$  ou aussi  $c(\theta)$  le point du plan de coordonnées polaires  $(\rho(\theta), \theta)$ . En pratique, c'est quelque chose que vous devrez vérifier.

On veut étudier l'allure de la courbe autour du point  $M(\theta_0)$ ,  $\theta_0 \in I$ . On se place dans le repère mobile  $(M(\theta_0), \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ . On écrit  $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ , d'où  $c'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta$ . En particulier, le vecteur dérivé  $c'(\theta)$  est nul si et seulement si  $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$ . Or en un point  $M(\theta_0)$  distinct du pôle, on a  $\rho(\theta_0) \neq 0$ . En particulier, on en déduit :

*Sur une courbe en coordonnées polaires, tout point distinct de l'origine (du pôle) est régulier.*

**Remarque 3.3.8** Cette phrase a plusieurs conséquences importantes. D'abord, un point  $M(\theta) \neq O$  distinct du pôle vérifie  $c'(\theta) \neq \vec{0}$ , donc  $p = 1$  (avec les notations du chapitre 1), et le point  $M(\theta) \neq O$  ne peut pas être un point de rebroussement.

On peut également en déduire que toute courbe paramétrée n'admet pas forcément d'équation polaire de la forme  $\rho = \rho(\theta)$ .

Cherchons maintenant quelle est la position de la tangente. Vue la forme du vecteur dérivé, elle n'est jamais dirigée selon le vecteur  $\vec{u}_{\theta_0}$ . Autrement dit,

*En un point différent du pôle, la tangente à une courbe en polaires ne passe jamais par le pôle  $O$ .*

**Remarque 3.3.9** C'est par exemple pour cette raison qu'un cercle de centre  $C(r_0, \theta_0)$  distinct de  $O$  et de rayon  $R < r_0$  ne peut pas être paramétré en polaires.

Pour tracer la tangente au point  $M(\theta_0)$ , il peut être utile de calculer l'angle, non nul d'après ci-dessus, et noté  $\nu \neq 0$ , entre cette tangente et la droite de vecteur  $\vec{u}_{\theta_0}$ . Un angle de droite étant défini modulo  $\pi$ , on peut supposer que  $\nu \in ]0, \pi[$ . La tangente a pour vecteur directeur le vecteur  $c'(\theta_0) = \rho'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + \rho(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}$ . L'angle en question, noté  $\nu$ , vérifie donc  $\tan \nu = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$ . Cette quantité n'est pas toujours bien définie car la dérivée  $\rho'(\theta_0)$  peut s'annuler. On préfère donc définir  $\nu$  par

$$\cotan \nu = \frac{\rho'(\theta_0)}{\rho(\theta_0)} = (\ln \circ \rho)'(\theta_0),$$

quantité qui elle est bien définie en dehors de l'origine.

**Remarque 3.3.10** L'angle  $\nu$  est défini par sa cotangente. Il n'est donc déterminé que modulo  $\pi$ , ce qui est normal car il s'agit d'un angle entre deux droites.

**Remarque 3.3.11** Notons qu'en un point  $M(\theta_0)$  tel que  $\rho'(\theta_0) = 0$  (extremum du rayon  $\rho$ ), la tangente est orthogonale au vecteur  $\vec{u}_{\theta_0}$ .

**Exemple 3.3.12** Donnons un exemple :  $\theta \mapsto \rho(\theta) = 2 \cos \theta + \cos 3\theta$  en  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . On a  $\rho'(\theta) = -2 \sin \theta - 3 \sin 3\theta$ . En  $\theta = 0$ , on a donc  $\rho(0) = 3$  et  $\rho'(0) = 0$ . La tangente en  $M(0)$  à la courbe est donc orthogonale à la courbe, on a  $\cotan \nu = 0$  et  $\nu = \frac{\pi}{2}$ , et  $c'(0) = 3\vec{v}_0 = 3\vec{j}$ . En  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a  $\rho(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\rho'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ . On a donc  $c'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{u}_{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}_{\pi/4}$  et  $\cotan \nu = -5$ . La tangente fait donc un angle  $\nu$  (calculable sur machine) avec  $\vec{u}_{\pi/4}$ .

**Exercice 3.3.13** Même étude avec  $\theta \mapsto \rho(\theta) = \sin 4\theta$  en  $\theta = \frac{\pi}{8}$ .

### Position de la courbe par rapport à sa tangente

L'étude est la même que dans le cas de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes.

Le point  $M(\theta_0)$  est dit *birégulier* si les vecteurs  $c'(\theta_0)$  et  $c''(\theta_0)$  sont indépendants, soit encore  $\det(c'(\theta_0), c''(\theta_0)) \neq 0$ . On calcule ce déterminant dans le repère  $(M(\theta_0), c'(\theta_0), c''(\theta_0))$ . On a  $\vec{c}'(\theta_0) = \rho'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + \rho(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}$ , et  $\vec{c}''(\theta_0) = (\rho''(\theta_0) - \rho(\theta_0))\vec{u}_{\theta_0} + 2\rho'(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0}$ . On en déduit que

$$\det(c'(\theta_0), c''(\theta_0)) = \rho(\theta_0)^2 + 2\rho'(\theta_0)^2 - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0).$$

Lorsque cette quantité s'annule, on peut avoir un point d'inflexion, mais pas nécessairement. Pour le savoir, il faut théoriquement calculer  $q > 1$ , i.e. le premier entier strictement supérieur à 1 en lequel on a  $\det(c'(\theta_0), c^{(q)}(\theta_0)) \neq 0$ . Ce calcul peut se révéler fastidieux, et on montre en fait le résultat suivant.

**Lemme 3.3.14** *La courbe admet un point d'inflexion en  $M(\theta_0) \neq 0$  si et seulement si la quantité*

$$\theta \mapsto \det(c'(\theta), c''(\theta)) = \rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)$$

*s'annule en changeant de signe en  $\theta = \theta_0$ .*

**Démonstration :** La démonstration rigoureuse est la même qu'en coordonnées cartésiennes, seule l'expression de  $\det(c'(\theta), c''(\theta))$  change.

Donnons ici deux démonstrations intuitives et utiles, qui anticipent peut-être légèrement sur vos connaissances.

- Intuitivement, un point d'inflexion signifie un changement de concavité de la courbe, soit encore un changement de l'orientation du repère  $(M(\theta), c'(\theta), c''(\theta))$ . Or l'*orientation* d'un repère est définie en toute rigueur comme le signe de  $\det(c'(\theta), c''(\theta))$ . Cette orientation change donc si et seulement si ce déterminant s'annule et change de signe en  $\theta_0$ .

- Intuitivement encore, la courbe tourne sa concavité vers le point  $O$  si et seulement si le vecteur  $c''(\theta)$  est dirigé « vers  $\overrightarrow{MO}$  », ou autrement dit, si  $c''(\theta) = ac'(\theta) + b\overrightarrow{MO}$ , avec  $b \geq 0$ . Un calcul donne

$$c''(\theta) = \frac{2r'(\theta)}{r(\theta)}c'(\theta) + \frac{1}{r^2}(r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta))\overrightarrow{MO}.$$

On en déduit que la courbe tourne sa concavité vers  $O$  si et seulement si la quantité  $r^2(\theta) + 2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)$  est positive, et la courbe change de concavité en  $\theta_0$  si et seulement si cette même quantité s'annule en changeant de signe en  $\theta_0$ . C'est le résultat voulu.  $\square$

**Exemple 3.3.15** Reprenons l'exemple 3.3.12 ci-dessus. Calculons  $\rho''(\theta) = -2\cos\theta - 9\cos 3\theta$ , d'où  $\rho''(0) = -11$  et

$$\det(\vec{c}'(0), \vec{c}''(0)) = 9 + 33 = 42.$$

Le point  $M(0)$  est donc birégulier.

En  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ , on a  $\det(\vec{c}'(\frac{\pi}{4}), \vec{c}''(\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2} + 25 - \frac{7}{2} = 22$ , le point est également birégulier.

Donnons un autre exemple. Considérons la courbe en polaires définie par  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \rho(\theta) = \frac{3\theta^2}{2} + \theta + 1$ . Vous pourrez vérifier par un calcul simple et une application du lemme ci-dessus que la courbe admet un point d'inflexion en  $\theta = 0$ .

### 3.3.3 Étude des passages au pôle

Le pôle, ou origine  $O$  est le seul point en lequel la courbe peut éventuellement être singulière.

**Remarque 3.3.16** La courbe peut passer plusieurs fois en  $O$ . On dit alors que  $O$  est un *point multiple*. Lorsqu'on parle du pôle comme point régulier ou singulier, il faut alors bien préciser de quel passage au pôle on parle, en précisant le paramètre  $\theta$  correspondant. Par exemple, la courbe paramétrée en polaires par  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin 2\theta$  passe deux fois au pôle.

On étudie donc la courbe localement au voisinage de tout angle  $\theta_0$  tel que  $\rho(\theta_0) = 0$ . On suppose que la courbe passe au pôle sans s'y arrêter, c'est-à-dire qu'il existe un petit intervalle de la forme  $]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$ , avec  $\alpha > 0$ , tel que pour tout  $\theta \neq \theta_0$  dans cet intervalle, on a  $\rho(\theta) \neq 0$ .

On écrit alors :

$$c'(\theta_0) = \rho'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0} + \rho(\theta_0)\vec{v}_{\theta_0} = \rho'(\theta_0)\vec{u}_{\theta_0}.$$

Autrement dit, si  $M(\theta_0)$  est régulier, c'est-à-dire si  $\rho'(\theta_0) \neq 0$ , alors la tangente à la courbe en  $M(\theta_0)$  est la droite passant par  $O$  de direction  $\theta_0$ . En fait, dans tous les cas, même si  $M(\theta_0)$  est singulier (ie si  $\rho(\theta_0) = 0$ ),

La tangente à la courbe en  $M(\theta_0) = 0$  est la droite passant par  $O$  de direction  $\theta_0$  (i.e. de pente  $\tan \theta_0$ ).

En effet, on a  $\overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ , d'où  $\frac{\overrightarrow{OM(\theta)}}{\|\overrightarrow{OM(\theta)}\|} = \vec{u}_\theta \rightarrow \vec{u}_{\theta_0}$  quand  $\theta \rightarrow \theta_0$ .

Par exemple, considérons la courbe paramétrée en polaires par  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \rho(\theta) = 2 \cos \theta + \cos 3\theta$ . En  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , la courbe vérifie  $\rho(\frac{\pi}{3}) = 0$ . La tangente est donc la droite de direction  $\frac{\pi}{3}$ , et donc de pente  $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  et d'équation  $y = \sqrt{3}x$ . Par ailleurs, on a  $\rho'(\theta) = -2 \sin \theta - 3 \sin 3\theta$  d'où  $\rho'(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ . Le point  $M(\frac{\pi}{3})$  est régulier.

**Exercice 3.3.17** Même étude avec  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \rho(\theta) = \sin 4\theta$  en  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Étudions maintenant l'allure de la courbe et sa position par rapport à sa tangente en un passage au pôle. On écrit  $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ , et on étudie les variations du signe de  $\rho(\theta)$  au voisinage de  $\theta_0$ . Il y a quatre possibilités, selon si  $\rho$  reste positive (et nulle en  $\theta_0$ ), reste négative (et nulle en  $\theta_0$ ), s'annule en changeant de signe en  $\theta_0$ . L'allure de la courbe est alors, selon les cas, la suivante :

Attention aux confusions : il suffit d'étudier le signe de  $\rho$ , pas de  $\rho'$  ! Ne confondez pas avec autre chose !

**Exercice 3.3.18** Illustrez chacun des quatre cas ci-dessus avec les exemples suivants :  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \sin \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto -\sin^2 \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \theta^2$ ,  $\theta \in ]-\infty, 1[ \mapsto \ln(1 - \theta)$ .

### 3.3.4 Branches infinies

On considère une courbe paramétrée en polaires  $\theta \in I \mapsto \rho(\theta)$ , et  $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  une borne de l'intervalle  $I$ . La courbe admet une branche infinie quand  $\theta \rightarrow T$  si et seulement si la distance de  $M(\theta) = (\rho(\theta), \theta)$  à l'origine  $O$  tend vers  $+\infty$  quand  $\theta \rightarrow T$ . Or cette distance est précisément égale à  $|\rho(\theta)|$ . La courbe admet donc une branche infinie quand  $\theta \rightarrow T$  si et seulement si  $\rho(\theta) \rightarrow +\infty$  ou  $\rho(\theta) \rightarrow -\infty$  quand  $\theta \rightarrow T$ .

On parle de « pseudo-branche infinie » lorsque  $\theta \rightarrow +\infty$  ou  $\theta \rightarrow -\infty$  sans forcément que  $\rho(\theta)$  tende vers l'infini.

Par exemple la courbe paramétrée par  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \rho(\theta) = \theta$  (*spirale d'Archimède*) admet une vraie branche infinie quand  $\theta \rightarrow +\infty$ , et la courbe paramétrée en polaires par  $\theta > 0 \mapsto \rho(\theta) = \frac{1}{\theta}$  admet une pseudo branche infinie quand  $\theta \rightarrow +\infty$ .

De même que pour les courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes, il n'est pas question de cataloguer toutes les possibilités de (pseudo) branches infinies. Nous chercherons à étudier les plus intéressantes.

#### Directions asymptotiques, recherche d'asymptotes

- Si  $\rho(\theta) \rightarrow \pm\infty$  quand  $\theta \rightarrow \theta_0 \in \mathbb{R}$ , la courbe a une *direction asymptotique* de direction  $\theta_0$  (id est dirigée par  $\vec{u}_{\theta_0}$ ).

Lorsque la courbe admet pour direction asymptotique  $\theta_0$ , on cherche si une droite de direction  $\theta_0$  peut être asymptote. Pour cela, on étudie la distance de  $M(\theta)$  à la droite passant par l'origine de direction  $\theta_0$  ; si cette distance tend vers une limite finie, la courbe admet une asymptote. Plus précisément, on a

- Si  $\rho(\theta) \rightarrow \pm\infty$  quand  $\theta \rightarrow \theta_0$  et si  $\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) \rightarrow l < \infty$ , la courbe admet la droite d'équation polaire  $\theta \in ]\theta_0, \theta_0 + \pi[ \mapsto \rho(\theta) = \frac{l}{\sin(\theta - \theta_0)}$  comme *asymptote*.

#### Branches spirales

On parle de branche spirale lorsque  $\theta \rightarrow \infty$  et  $\rho(\theta) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, la courbe spirale autour du cercle de centre  $O$  et de rayon  $l$ . Dans le cas particulier où  $l = 0$ , la courbe spirale autour de l'origine. Exemples : la spirale d'Archimède  $\theta \mapsto \rho(\theta) = a\theta$ ,  $\theta > 0 \mapsto \rho(\theta) = 1 + e^{-\theta}$ .

**Exemple 3.3.19** Considérons la courbe d'équation polaire  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \rho(\theta) = \frac{\theta}{\theta - 1}$ .

Quand  $\theta \rightarrow 1^+$ ,  $\rho(\theta) \rightarrow +\infty$ . De plus,  $\rho(\theta) \sin(\theta - 1) = \theta \frac{\sin(\theta - 1)}{\theta - 1} \rightarrow 1$  quand  $\theta \rightarrow 1^+$ . La courbe admet donc une asymptote d'équation polaire  $\theta \in ]1, \pi + 1[ \mapsto \rho(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta - 1)}$ .

Quand  $\theta \rightarrow 1^-$ , les calculs sont identiques,  $\rho(\theta) \rightarrow -\infty$  et  $\rho(\theta) \sin(\theta - 1) = \theta \frac{\sin(\theta - 1)}{\theta - 1} \rightarrow 1$ , la droite d'équation polaire  $\theta \in ]1, \pi + 1[ \mapsto \rho(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta - 1)}$  est asymptote.

Quand  $\theta \rightarrow +\infty$ ,  $\rho(\theta) \rightarrow 1$ , il y a une branche spirale, et la courbe admet pour cercle asymptote le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Quand  $\theta \rightarrow -\infty$ ,  $\rho(\theta) \rightarrow 1$  et la courbe admet pour cercle asymptote le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

**Exemple 3.3.20** Considérons la courbe d'équation polaire  $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm \frac{\pi}{3}\} \mapsto \rho(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 - 2 \cos \theta}$ . Quand  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^+$ ,  $\rho(\theta) \rightarrow +\infty$  et  $\rho(\theta) \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$  n'a pas de limite finie (montrez-le!). La courbe a seulement une direction asymptotique de direction  $\theta = \theta_0$ .

Quand  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-$ , les calculs sont les mêmes et donnent le même résultat.

### 3.3.5 Plan d'étude pratique

**Étape 0** : Rechercher un paramétrage en polaires de la courbe, lorsqu'elle est définie par un problème cinématique ou géométrique.

**Étape 1** : Rechercher un domaine d'étude le plus petit possible

**Étape 2** : Étudier les variations de  $\rho$ , en étudiant le signe de  $\rho'$  quand les calculs sont raisonnables.

**Étape 3** : Donner l'allure de la courbe au voisinage des extrema non nuls de  $\rho$  et au voisinage des points d'inflexion.

**Étape 4** : Étudier le signe de  $\rho$  (pas de sa dérivée!!!) et l'allure de la courbe à chaque passage au pôle.

**Étape 5** : Étudier les branches infinies.

**Étape 6** : Tracer la courbe

**Exemple 3.3.21** Étudions la courbe en polaires  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \mapsto \rho(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$ .

Étape 1 : la courbe est périodique de période  $\pi$ , on l'étudie donc sur  $]0, \pi[$ , et on complètera le tracé par une symétrie centrale de centre  $O$  (i.e. une rotation d'angle  $\pi$ ).

De plus, on a  $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$  pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ . La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . On l'étudie donc sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , et on complètera le tracé par symétrie.

Étape 2 : La fonction  $\rho(\theta)$  s'annule en  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , est positive sur  $]0, \frac{\pi}{3}[$  et négative sur  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ . Sans étudier le signe de la dérivée, on voit aisément que  $\theta \mapsto \sin 3\theta$  est croissante sur  $]0, \frac{\pi}{6}[$  et décroissante sur  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ . La fonction  $\theta \mapsto \frac{1}{\sin \theta}$  est elle décroissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . On en conclut (sans calculs) que  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  est décroissante sur  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  (et vaut 1 en  $\frac{\pi}{6}$ , 0 en  $\frac{\pi}{3}$  et  $-1$  en  $\frac{\pi}{2}$ ). Sur  $]0, \frac{\pi}{6}[$ , on peut réécrire  $\rho(\theta) = \cos 2\theta + 2 \cos^2 \theta$ , et on voit que  $\rho$  est encore décroissante. D'ailleurs, cette expression de  $\rho$  permet de calculer plus facilement les dérivées successives de  $\rho$ .

Étape 3 : Le rayon  $\rho$  admet un minimum en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . En ce point, on vérifie aisément que la tangente est horizontale.

Étape 4 : Le seul passage au pôle a lieu pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Le rayon  $\rho(\theta)$  est positif avant  $\frac{\pi}{3}$  et négatif après, ce qui donne l'allure de la courbe.

Étape 5 : La seule branche infinie éventuelle est en  $\theta = 0$ . Mais quand  $\theta \rightarrow 0$ , on vérifie que  $\rho(\theta) \rightarrow 3$ , il n'y a donc pas de branche infinie, mais simplement un extremum de  $\rho$ . On vérifie qu'en ce point, la tangente est verticale.

Étape 6 : On trace la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on effectue la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation polaire  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , puis la symétrie centrale de centre  $O$ .

# Chapitre 4

## Étude métrique des courbes

### 4.1 Longueur, rectification

Le mot métrique évoque la notion de mesure. Que mesure-t-on lorsqu'on étudie une courbe ? Il est naturel de commencer par vouloir mesurer les longueurs des courbes que l'on étudie. Ce calcul des longueurs des courbes s'appelle la *rectification des courbes*.

#### 4.1.1 Arc rectifiable

La première question est la suivante. Comment définit-on la longueur d'une courbe ? Partons du principe que nous travaillons dans le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé. Implicitement, ceci suppose qu'on sait mesurer certaines longueurs : les longueurs des segments. En effet, si  $A$  a pour coordonnées  $(a_1, a_2)$  et  $B(b_1, b_2)$ , alors la *longueur du segment*  $[AB]$  est définie par

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

En fait, cette connaissance que nous avons de la notion de longueur d'un segment, conforme à l'intuition physique du monde réel qui nous entoure, ne peut pas être démontrée.

Il s'agit d'un axiome (i.e. d'une phrase mathématique non démontrable) si on suppose que la longueur est une grandeur physique, et d'une définition de la notion de longueur si on ne veut pas parler de physique et du monde réel.

Sachant qu'on ne sait pour l'instant calculer que les longueurs de segments, pour calculer la longueur d'une courbe, nous allons l'approcher par des segments.

Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée, et  $\mathcal{S} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  une *subdivision de l'intervalle*, c'est-à-dire la donnée d'un découpage de  $[a, b]$  en  $[a, b] = \cup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i]$ , avec  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier non nul.

On voudrait approcher la longueur de la courbe par la somme des longueurs des segments  $[c(t_{i-1}), c(t_i)]$ , notée  $L_{\mathcal{S}}(c)$  :

$$L_{\mathcal{S}}(c) = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{c(t_{i-1})c(t_i)}\|,$$

où on note  $\|\overrightarrow{c(t_{i-1})c(t_i)}\|$  la longueur du segment  $[c(t_{i-1}), c(t_i)]$ . L'union des segments  $[c(t_{i-1}), c(t_i)]$  est appelée *ligne polygonale* associée à la subdivision  $\mathcal{S}$ .

Mais intuitivement, on voit bien que plus  $n$  sera grand, et plus les points  $c(t_i)$  seront proches les uns des autres, plus l'approximation sera bonne. On prend donc la définition suivante :

**Définition 4.1.1** *L'arc*  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  *est dit rectifiable s'il existe une constante*  $C > 0$  *telle que pour toute subdivision*  $\mathcal{S}$  *de*  $[a, b]$ , *on ait*

$$L_{\mathcal{S}}(c) \leq C < +\infty.$$

On voudrait maintenant pouvoir définir la longueur de  $c$ . Intuitivement, il s'agit de la « limite » des longueurs des lignes polygonales associées à des subdivisions de plus en plus fines de l'intervalle. Mais il n'est pas vraiment possible de définir rigoureusement une telle limite. On voudrait alors prendre la plus grande valeur possible de  $L_{\mathcal{S}}(c)$  comme longueur de  $c$ ; si une telle valeur existe, c'est-à-dire si le *maximum* de toutes les longueurs de toutes les subdivisions possibles de  $[a, b]$  existe, on voudrait que ce maximum soit la longueur de la courbe. Mais ce maximum n'a pas de raison d'exister, car il y a une infinité de subdivisions possibles de l'intervalle  $[a, b]$ .

**Définition 4.1.2** Si l'arc  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est rectifiable, on appelle longueur de  $c$  la quantité

$$L(c) = \sup_{\mathcal{S}} L_{\mathcal{S}}(c),$$

où la notation  $\sup$  désigne le supremum de toutes les longueurs  $L_{\mathcal{S}}(c)$ , pour toutes les subdivisions possibles  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire la plus petite constante  $C < +\infty$  telle que  $L_{\mathcal{S}}(c) \leq C$  pour toute subdivision  $\mathcal{S}$  de  $[a, b]$ .

**Remarque 4.1.3** Si un arc  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est rectifiable, alors tout sous-arc  $c|_{[a', b']} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pour  $[a', b'] \subset [a, b]$  est rectifiable et  $L(c|_{[a', b']}) \leq L(c)$ .

**Exemple 4.1.4** Avec cette définition, le segment  $[AB]$  paramétré par  $t \in [0, 1] \mapsto c(t) = ((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + tb_2)$  a pour longueur...  $AB$ !

**Exemple 4.1.5 (Le flocon de Van Koch)** Considérons le segment horizontal  $[O, I]$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $O = (0, 0)$  et  $I = (1, 0)$ . Enlevons le segment central de longueur  $1/3$ , et remplaçons le par deux segments de longueur  $1/3$  formant un triangle équilatéral. Itérons cette procédure. À la limite, nous obtenons ce qu'on appelle une *courbe fractale*, dite *courbe de Van Koch*, qui n'est pas rectifiable. Ceci sera vu en TD.

**Exemple 4.1.6** À l'aide de la définition d'une courbe rectifiable, en construisant des polygones réguliers ayant de plus en plus de côtés inscrits dans un cercle et en calculant la longueur de leur périmètre, on obtient ainsi des suites convergeant vers  $\pi$ , permettant d'en obtenir des valeurs approchées. Nous verrons ceci en TP.

En pratique, on revient rarement à la définition de courbe rectifiable, et on utilise beaucoup le théorème important suivant.

**Théorème 4.1.7** Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de classe  $C^1$  (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue). Alors  $c$  est rectifiable et sa longueur vaut

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

**Remarque 4.1.8** Lorsqu'on veut calculer la longueur d'une courbe qui est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue partout sauf en un nombre fini de points, on calcule sa longueur sur chaque sous-intervalle de  $[a, b]$  sur lequel elle est continue. Autrement dit, ce théorème est très utile y compris pour les fonctions  $C^1$  par morceaux, comme par exemple  $t \in [-1, 1] \mapsto (t, \sqrt{|t|})$ .

**Démonstration :** Commençons par le plus facile : démontrons que si  $c$  est de classe  $C^1$ , alors  $c$  est rectifiable et  $L(c) \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$ . Considérons une subdivision quelconque  $\mathcal{S} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$ . On a alors

$$L_{\mathcal{S}}(c) = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{c(t_{i-1})c(t_i)}\| = \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c'(t)\| dt = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Autrement dit, toutes les longueurs  $L_{\mathcal{S}}(c)$ , pour toutes les subdivisions  $\mathcal{S}$  de  $[a, b]$ , sont inférieures à  $\int_a^b \|c'(t)\| dt$ . Vues les définitions de courbe rectifiable et de longueur, on en déduit que  $c$  est rectifiable et que  $L(c) \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$ .

Démontrons maintenant que  $L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$ . Pour cela, il nous suffit de trouver, quelle que soit la précision  $\varepsilon > 0$  souhaitée, une subdivision  $\mathcal{S}_{\varepsilon}$  de  $[a, b]$  telle que

$$L_{\mathcal{S}_{\varepsilon}} \geq \int_a^b \|c'(t)\| dt - \varepsilon.$$

Pour cela, nous allons utiliser le fait que la courbe  $c$  est de classe  $C^1$ , et donc que la norme de sa dérivée  $\|c'\|$  est continue. Rappelons que cela signifie que quelle que soit la précision  $\varepsilon > 0$  avec laquelle on regarde la courbe, et quel que soit l'instant  $t_0 \in [a, b]$  autour duquel on regarde la courbe, il existe un  $\eta > 0$  tel que si  $t$  diffère de  $t_0$  de moins de  $\eta$ , alors  $\|c'(t)\|$  est presque égal à  $\|c'(t_0)\|$  (à  $\varepsilon$  près). Ceci se réécrit en abrégé comme ceci :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in [a, b], \exists \eta > 0, \forall t \in ]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, \left| \|c'(t)\| - \|c'(t_0)\| \right| \leq \varepsilon.$$

Comme l'intervalle  $[a, b]$  est compact, c'est-à-dire fermé et borné, le théorème de Heine assure que la fonction  $t \mapsto \|c'(t)\|$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Ceci signifie que dans la définition ci-dessus, à  $\varepsilon$  fixé, on peut choisir un  $\eta$  valable pour tous les  $t_0 \in [a, b]$ . Plus précisément, ceci signifie que quelle que soit la précision  $\varepsilon > 0$  avec laquelle on regarde la courbe, il existe un  $\eta > 0$  tel que quel que soit l'instant  $t_0 \in [a, b]$  autour duquel on regarde la courbe, si  $t$  diffère de  $t_0$  de moins de  $\eta$ , alors  $\|c'(t)\|$  est presque égal à  $\|c'(t_0)\|$  (à  $\varepsilon$  près), soit encore  $\left| \|c'(t)\| - \|c'(t_0)\| \right| \leq \varepsilon$ .

Fixons une précision  $\varepsilon > 0$ . Nous voulons trouver une subdivision  $\mathcal{S}$  telle que  $L_{\mathcal{S}}(c) \geq \int_a^b \|c'(t)\| dt - \varepsilon$ . Choisissons une subdivision  $\mathcal{S} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on ait  $|t_i - t_{i+1}| < \eta$ . On dit que  $\mathcal{S}$  est de pas inférieur à  $\eta$ . Alors pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , on a  $|t - t_i| < |t_{i+1} - t_i| < \eta$  d'où  $\left| \|c'(t)\| - \|c'(t_i)\| \right| < \varepsilon$ . En sommant sur  $0 \leq i \leq n-1$ , on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|c'(t)\| dt \leq \varepsilon(b-a) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|c'(t_i)\| dt = \varepsilon(b-a) + \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{\|c(t_i)c(t_{i+1})\|} = \varepsilon(b-a) + L_{\mathcal{S}}(c)$$

Donc on peut construire des subdivisions  $\mathcal{S}$  de l'intervalle  $[a, b]$  telles que la longueur de la ligne polygonale associée est aussi proche qu'on veut de  $\int_a^b \|c'(t)\| dt$ . C'est bien le résultat souhaité.  $\square$

Si  $t \in [a, b] \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$  est une courbe de classe  $C^1$  paramétrée en coordonnées cartésiennes, on a

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Si  $\theta \in [a, b] \mapsto c(\theta) = (\rho(\theta), \theta)$  est une courbe de classe  $C^1$  paramétrée en coordonnées polaires, sa longueur vaut

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}.$$

Vous ne devez pas nécessairement retenir ces deux formules par coeur. En revanche, vous devez connaître parfaitement le théorème 4.1.7 ci-dessus et savoir les retrouver en 10 secondes à l'aide du théorème !

**Exemple 4.1.9** On retrouve de manière immédiate que la longueur d'un cercle paramétré par  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto r(\theta) = (r_0, \theta)$  est  $L(c) = \int_0^{2\pi} r_0 d\theta = 2\pi r_0$ . Cependant, dans le calcul ci-dessus, on utilise implicitement le fait que  $2\pi$  est la période des fonctions cosinus et sinus, et donc ... le périmètre du cercle de rayon 1 ! En particulier, cette démonstration se mord la queue !

## 4.1.2 Abscisse curviligne

D'un point de vue mathématique, on avait dit plus haut que tous les paramétrages d'un arc se valaient, le « meilleur » étant éventuellement celui qui est le plus facile à trouver ou étudier. Lorsqu'on cherche à étudier certaines propriétés métriques des courbes : longueur, courbure, le paramétrage défini ci-dessus est très adapté.

**Définition 4.1.10** Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arc paramétré de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ . On dit que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est normal, ou paramétré par abscisse curviligne s'il est paramétré à vitesse 1, i.e. si pour tout  $t \in I$ , on a  $\|c'(t)\| = 1$ .

La question est alors : un tel paramétrage existe-t-il toujours ? Si oui, comment fait-on pour trouver un tel paramétrage ? Est-il unique ?

**Analyse du problème :** Si  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un paramétrage normal de l'arc, alors  $\int_{s_0}^s \|\gamma'(u)\| du = s - s_0$  représente la longueur algébrique de l'arc entre les points  $\gamma(s_0)$  et  $\gamma(s)$  (si  $s \leq s_0$ , cette longueur est négative !).

**Synthèse :** Ce qui précède donne envie de donner la définition suivante. Supposons que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'a pas de point singulier, et choisissons un point origine  $c(t_0)$  sur l'arc. Alors pour tout  $t \in I$ ,  $\|c'(t)\| > 0$  et l'application

$\varphi : t \in I \mapsto \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$  est strictement croissante sur  $I$ , continue, dérivable, et de dérivée continue. C'est une bijection de  $I$  dans  $\varphi(I)$ . On pose alors

$$s := \varphi(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du.$$

C'est l'abscisse curviligne de la courbe. Et le paramétrage

$$s \in \varphi(I) \mapsto \gamma(s) := c(\varphi^{-1}(s))$$

est un paramétrage par abscisse curviligne de la courbe.

On peut montrer que tous les paramétrages par abscisse curviligne sont de cette forme : si on choisit un *sens de parcours* sur  $c$  (ici, on parcourt la courbe dans le sens des  $t$  croissants) et une origine  $c(t_0)$  sur la courbe, on peut définir un unique paramétrage par abscisse curviligne associé.

**Exercice 4.1.11** Supposons que  $I = [a, b]$ . En utilisant la définition de  $\varphi$ , montrez que  $\varphi(I) = [-L(c_{|[a,t_0]}), L(c_{|[t_0,b]})]$

**Remarque 4.1.12** Attention ! Pour que le paramétrage par abscisse curviligne soit correctement défini, on a besoin du fait que  $\varphi$  soit bijective. Pour cela, on utilise le fait que  $\varphi$  est strictement croissante, ce qui vient du fait que pour tout  $t \in I$ ,  $\|c'(t)\| \neq 0$ . En particulier, on ne parle d'abscisse curviligne que pour des arcs réguliers, i.e. sans points singuliers.

On notera  $\vec{\tau}(s)$  le vecteur tangent de la courbe au point  $\gamma(s)$ . Par définition de l'abscisse curviligne, c'est un vecteur unitaire. Si  $s = \varphi(t)$ , on a bien sûr

$$\vec{\tau}(s) = \gamma'(s) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

Remarquez que  $s = \varphi(t)$  d'où  $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t) = \|c'(t)\|$ . Lorsqu'on veut déterminer  $s$ , on choisit  $t_0 \in I$ , et on intègre l'équation

$$ds = \|c'(t)\| dt.$$

Ce n'est pas toujours facile à faire explicitement, mais dans les mauvais cas, on s'en sort avec cette égalité entre dérivées.

**Exercice 4.1.13** Donnez un paramétrage par abscisse curviligne de la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto (3 \cos t^2, 3 \sin t^2)$ .

Résumons maintenant tout ce qui précède dans une proposition pratique :

**Proposition 4.1.14** Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$  telle que pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait  $\|c'(t)\| \neq 0$ . Alors on définit un paramétrage par abscisse curviligne de la trajectoire  $c([a, b])$  par

$$\begin{aligned} \gamma : [0, L(c_{|[a,b]})] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \gamma(s) := c(\varphi^{-1}(s)), \end{aligned}$$

avec  $s = \varphi(t)$  et  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$  est l'application bijective de classe  $C^1$  et de fonction réciproque de classe  $C^1$  définie par

$$\varphi(t) = L(c_{|[0,t]}) = \int_0^t \|c'(u)\| du.$$

**Démonstration :** •  $\varphi$  est continue et strictement croissante donc bijective de  $[a, b]$  dans  $[0, L(c)]$ . Donc  $\varphi^{-1}$  est bien définie.

•  $\varphi$  est définie par une intégrale, elle est donc continue et dérivable de dérivée  $t \mapsto \|c'(t)\|$  continue. Elle est donc de classe  $C^1$ .

• Sa dérivée ne s'annule jamais sur  $[a, b]$  par hypothèse, donc  $\varphi^{-1}$  est dérivable de dérivée  $(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}$ . Sa dérivée est continue sur  $[a, b]$ , donc  $\varphi^{-1}$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ .

• On a donc montré que  $\gamma : [0, L(c)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un paramétrage  $C^1$  de la trajectoire  $c([a, b])$ .

• On a clairement

$$\overrightarrow{\gamma'(s)} = \overrightarrow{c'(\varphi^{-1}(s))} \cdot (\varphi^{-1})'(s) = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\|c'(\varphi^{-1}(s))\|},$$

d'où bien sûr  $\|\overrightarrow{\gamma'(s)}\| = 1$ . La courbe  $\gamma : [0, L(c)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est donc un paramétrage par abscisse curviligne de la trajectoire  $c([a, b])$ .  $\square$

**Remarque 4.1.15** On ne peut pas toujours calculer explicitement  $\varphi$ ,  $\gamma$  et  $s$  mais on peut alors s'en sortir à l'aide des formules

$$\frac{ds}{dt} = \varphi'(t) = \|c'(t)\| \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\gamma'(s)} = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\|c'(\varphi^{-1}(s))\|} = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}.$$

Finissons ce paragraphe par un lemme très utile.

**Lemme 4.1.16** Si  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe paramétrée par abscisse curviligne deux fois dérivable, alors pour tout  $s \in [0, L]$  le vecteur  $\overrightarrow{\gamma''(s)}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{\gamma'(s)}$ .

**Exercice 4.1.17** Attention, ce lemme est totalement faux en général pour une courbe qui n'est pas paramétrée par abscisse curviligne. Vérifiez le sur des exemples.

## 4.2 Courbure, Repère de Frénet, centre de courbure, cercle osculateur

Dans ce paragraphe, nous allons parler de courbure.

Les courbes planes que vous connaissiez le mieux sans doute dans le secondaire étaient les droites et les cercles. Intuitivement, tout le monde sera d'accord pour dire que le cercle est courbé et la droite ne l'est pas. De même, on a envie de dire qu'un cercle de petit rayon est « plus courbé » qu'un cercle de grand rayon.

Essayons maintenant de définir une notion mathématique correspondant à cette intuition. La courbure de  $\gamma$  en un point  $\gamma(s)$  de la courbe est une notion qui permet de dire si localement autour de  $\gamma(s)$  la courbe est courbée comme une droite ou comme un cercle. Il est naturel de vouloir définir une notion mathématique de courbure telle qu'une droite sera de courbure nulle (pas courbée du tout) et qu'un cercle de grand rayon aura une petite courbure (et inversement). En fait, nous verrons que dans le cas du cercle, la courbure sera exactement l'inverse du rayon. Mais comment fait-on pour une courbe quelconque ? Nous allons donner une définition abstraite de la courbure, et nous verrons plus loin le lien avec la discussion ci-dessus.

### 4.2.1 Courbure d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne

Dans tout ce paragraphe,  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un arc paramétré par abscisse curviligne de classe  $C^2$ . On le supposera en tout point *birégulier*. Vu le lemme 4.1.16, ceci revient à supposer que pour tout  $s \in J$ , on a  $\overrightarrow{\gamma''(s)} \neq \vec{0}$ .

Cette hypothèse est très naturelle. En effet si on fait un dessin de ce qui se passe autour d'un point *non* birégulier, on comprend le problème. Autour d'un point d'inflexion, le cercle qui va le mieux approcher la courbe change de côté. Autrement dit, en le point d'inflexion, il n'est pas défini. Autour d'un point de rebroussement de première espèce, le problème est identique. En un point de rebroussement de seconde espèce, il y a deux cercles qui approchent chacun bien l'un des deux côtés de la courbe. On ne peut pas définir le meilleur cercle. En de tels points, on ne peut donc pas parler de courbure.

En tout point  $\gamma(s)$ , le vecteur  $\overrightarrow{\gamma'(s)}$  est bien sûr unitaire et tangent à la courbe, et le vecteur  $\overrightarrow{\gamma''(s)}$  est orthogonal à la courbe, mais pas forcément unitaire. On notera

$$\vec{n}(s) = \frac{\overrightarrow{\gamma''(s)}}{\|\overrightarrow{\gamma''(s)}\|}$$

le vecteur *unitaire* orthogonal à la courbe qui est colinéaire et de même sens que  $\overrightarrow{\gamma''(s)}$ .

**Définition 4.2.1** On appelle courbure de la courbe au point  $\gamma(s)$  le nombre positif  $C(s) = \|\gamma''(s)\|$ . On appelle rayon de courbure la quantité  $R(s) = \frac{1}{C(s)}$ . Le centre de courbure est le point  $\Omega(s)$  tel que

$$\overrightarrow{\gamma(s)\Omega(s)} = R(s)\vec{n}(s) = R(s)^2 \overrightarrow{\gamma''(s)} = \frac{1}{C(s)^2} \overrightarrow{\gamma''(s)}.$$

Le cercle osculateur à la courbe au point  $\gamma(s)$  est le cercle de centre  $\Omega(s)$  et de rayon  $R(s)$ .

**Exemple 4.2.2** Soit  $\gamma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la courbe définie par  $s \mapsto (3 \cos \frac{s}{3}, 3 \sin \frac{s}{3})$ . Alors sa trajectoire est le cercle  $C(0, 3)$ . Elle est paramétrée par abscisse curviligne puisque pour tout  $s \in [0, 6\pi]$  on a  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . On calcule  $\overrightarrow{\gamma''(s)} = (\frac{1}{3} \cos \frac{s}{3}, -\frac{1}{3} \sin \frac{s}{3})$ , d'où  $\|\gamma''(s)\| = C(s) = \frac{1}{3}$  et  $R(s) = 3$ . Ouf! le rayon de courbure d'un cercle de rayon 3 vaut 3. De plus, on a

$$\overrightarrow{\gamma(s)\Omega(s)} = R(s)^2 \overrightarrow{\gamma''(s)} = (-3 \cos \frac{s}{3}, -3 \sin \frac{s}{3}) = -\overrightarrow{O\gamma(s)} = \overrightarrow{\gamma(s)O}.$$

Donc  $\Omega(s) = O$ . Autrement dit, lorsque la courbe paramétrée est un cercle, en tout point le cercle osculateur est confondu avec le cercle de départ, ce qui est la moindre des choses!

**Exercice 4.2.3** Donnez le paramétrage par abscisse curviligne, puis calculez la courbure et le rayon de courbure en chaque point du cercle paramétré par  $t \in \mathbb{R} \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t)$ . Que constatez-vous?

Même question avec la droite paramétrée par  $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 0)$ , puis avec la droite  $t \in \mathbb{R} \mapsto (a + bt, c + dt)$ .

**Remarque 4.2.4** Le cercle osculateur est le cercle qui approche le mieux la courbe. En effet, c'est l'unique cercle tel que au point  $\gamma(s)$ , un mobile qui parcourt la courbe à vitesse 1 a la même vitesse et la même accélération qu'un mobile qui parcourt le cercle osculateur à vitesse 1.

**Remarque 4.2.5** La notion équivalente à celle de courbure pour les mécaniciens est celle d'accélération. En particulier, pour qu'un véhicule (voiture, train, vélo) ne sorte pas de la route qu'il essaie de suivre dans un virage, celle-ci doit être au moins de classe  $C^2$ . Ceci revient à dire que la courbure de la courbe est bien définie. Vous vous convaincrez aisément que la plupart des routes et toutes les voies de chemin de fer sont  $C^2$ . En Suisse, elles sont parait-il même de classe  $C^3$  pour plus de sécurité!

## 4.2.2 Courbure dans le cas d'une courbe paramétrée quelconque

En pratique, on se donne une courbe paramétrée  $c : t \in [a, b] \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  dont tous les points sont biréguliers. Si on sait calculer explicitement et donner un paramétrage par abscisse curviligne de la trajectoire, on se ramène à l'étude du paragraphe précédent.

Nous supposons dans ce paragraphe que ce n'est pas possible de donner un paramétrage explicite par abscisse curviligne. Le but est de calculer la courbure, le rayon de courbure et le centre de courbure au point  $c(t)$  de la courbe. On connaît la fonction  $t \rightarrow c(t)$ , et donc sa fonction dérivée  $t \rightarrow \overrightarrow{c'(t)}$  et la norme de celle-ci  $t \mapsto \|\overrightarrow{c'(t)}\| = \varphi(t)$ .

On écrit alors  $\gamma(s) = c(\varphi^{-1}(s)) = c(t)$ , puis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma'(s)} &= \frac{\overrightarrow{c'(\varphi^{-1}(s))}}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{\overrightarrow{c'(t)}}{\|\overrightarrow{c'(t)}\|}, \quad \text{et} \\ \overrightarrow{\gamma''(s)} &= \frac{\overrightarrow{c''(\varphi^{-1}(s))}}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))^2} - \frac{\varphi''(\varphi^{-1}(s))}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))^3} \overrightarrow{c'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{\overrightarrow{c''(t)}}{\|\overrightarrow{c'(t)}\|^2} - \varphi''(t) \frac{\overrightarrow{c'(t)}}{\|\overrightarrow{c'(t)}\|^3}. \end{aligned}$$

On connaît tous les termes de l'expression de droite, on peut donc calculer ce vecteur, et donc sa norme. La courbure au point  $c(t)$  est donc définie par

$$C(t) = \|\gamma''(\varphi(t))\| = \left\| \frac{\overrightarrow{c''(t)}}{\|\overrightarrow{c'(t)}\|^2} - \varphi''(t) \frac{\overrightarrow{c'(t)}}{\|\overrightarrow{c'(t)}\|^3} \right\|.$$

Ensuite le rayon de courbure vaut bien sûr  $R(t) = \frac{1}{C(t)}$ .

Attention! Le seul piège est le calcul de  $\Omega(t)$ . Le centre de courbure vérifie toujours  $\overrightarrow{c(t)\Omega(t)} = R(t)\vec{n}(t)$ . Et  $\vec{n}(t)$  est toujours un vecteur unitaire normal à la courbe, mais il n'est pas colinéaire à  $c''(t)$ ! Pour le calculer, on cherche les vecteurs unitaires normaux à la courbe (il y en a deux) et  $\vec{n}(t)$  est celui qui vérifie  $\langle \vec{n}(t), c''(t) \rangle \geq 0$ .

**Exemple 4.2.6** Illustrons ce paragraphe en traitant l'exercice 4 de la feuille 5.

Finissons le paragraphe par un peu de vocabulaire sur des notions que nous n'aurons pas le temps de développer.

Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée de classe  $C^2$  dont tous les points sont biréguliers. On appelle *développée de la courbe* la courbe  $t \in I \mapsto \Omega(t)$  décrite par les centres de courbure. Une *développante* de la courbe est une courbe dont  $c$  est la développée.

Les notions de développante et de développée servent beaucoup en mécanique, en particulier dans la fabrication d'engrenages vérifiant de bonnes propriétés de contact sans frottement ou glissement.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes en coordonnées paramétriques</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction, plan du cours	3
1.2	Définitions	4
1.3	Domaine d'étude	6
1.4	Étude locale de la courbe au voisinage d'un point $M(t_0)$	7
1.4.1	Vitesse- Tangente	7
1.4.2	Position de la courbe par rapport à sa tangente	10
1.5	Branches infinies	12
1.6	Points doubles	13
1.7	Étude pratique d'une courbe paramétrée	14
1.8	Courbes de Bézier	15
<b>2</b>	<b>Courbes définies implicitement , Coniques</b>	<b>17</b>
2.1	Courbes définies implicitement	17
2.1.1	Généralités	17
2.1.2	Lignes de niveau	18
2.2	Coniques	20
2.2.1	Définition par une équation du second degré	20
2.2.2	Réduction de l'équation d'une conique	21
2.2.3	Étude détaillée des coniques	22
2.2.4	Définition par foyer-directrice	24
2.2.5	Paramétrage des coniques	26
2.2.6	Interprétation optique des foyers	28
2.2.7	Formulaire	30
<b>3</b>	<b>Courbes en coordonnées polaires</b>	<b>31</b>
3.1	Coordonnées polaires	31
3.2	Coordonnées sphériques et cylindriques	32
3.3	Courbes en coordonnées polaires	32
3.3.1	Domaine d'étude	34
3.3.2	Étude locale en un point distinct de l'origine	35
3.3.3	Étude des passages au pôle	36
3.3.4	Branches infinies	37
3.3.5	Plan d'étude pratique	38
<b>4</b>	<b>Étude métrique des courbes</b>	<b>40</b>
4.1	Longueur, rectification	40
4.1.1	Arc rectifiable	40
4.1.2	Abscisse curviligne	42
4.2	Courbure, Repère de Frénet, centre de courbure, cercle osculateur	44
4.2.1	Courbure d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne	44
4.2.2	Courbure dans le cas d'une courbe paramétrée quelconque	45