Corrigé du partiel de Méthodes expérimentales - Jeudi 11 mai 2006

Question de cours (3 points) :
a) Soit $t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t)$. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe en $c(5\pi/6)$?
b) Quelle peut être l'allure d'une courbe au voisinage d'un point non birégulier d'une courbe paramétrée $t \in I \mapsto c(t) = (x(t), y(t))$? On dessinera schématiquement tous les cas de figure avec leurs noms.

CORRIGÉ
a) L'équation de la tangente au point $c(5\pi/6)$ est $(x - x(5\pi/6))y'(5\pi/6) - (y - y(5\pi/6))x'(5\pi/6) = 0$, soit encore $y = \sqrt{x} + 2$.
b) L'allure au point $c(t_0)$ dépend de la parité des entiers caractéristiques p et q, où $p \geq 1$ est le premier entier tel que $c^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $q \geq p + 1$ est le premier entier tq $c^{(q)}(t_0)$ est non nul et non colinéaire à $c^{(p)}(t_0)$. Pour les dessins, voir cours.
p impair et q pair: point ordinaire.
p impair et q impair : point d'inflexion
p pair et q impair : point de rebroussement de première espèce
p pair et q pair : point de rebroussement de deuxième espèce

Exercice 1 ($\simeq$ 5 points) : Soit $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 25x^2 + 50x - 4y^2 + 16y + 109 = 0\}$.
a) Comment appelle-t-on ce type d'ensemble?
b) Réduire son équation par un changement de repère.
c) Donner, par un dessin, l'allure de l'ensemble $\mathcal{H}$ dans le nouveau repère (avec coordonnées des points intéressants, asymptotes,...).
d) Donner deux paramétrages distincts de la branche $\mathcal{H}^- = \{(x, y) \in \mathcal{H},\ y < 0\}$. On démontrera que ce sont effectivement des paramétrages.

CORRIGÉ
a) C'est une conique, définie par une équation polynomiale de degré deux.
b) On élimine les termes de degré 1 comme suit :

$$25x^2 + 50x - 4y^2 + 16y + 8 = 25(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 100 = 25(x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 + 100$$

Donc $(x, y) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = -1$. C'est l'équation d'une hyperbole. On change l'origine O du repère, en considérant $O'(-1, 2)$. Dans le repère $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe a pour équation $-\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{25} = 1$ avec $X = x + 1$ et $Y = y - 2$.
c) Dans le repère d'origine O', cette hyperbole a pour sommets les points $(0, 5)$ et $(0, -5)$. Elle a pour asymptotes les droites $Y = \frac{5}{2}X$ et $Y = -\frac{5}{2}X$. Pour le tracé, voir cours.
d) La branche $\mathcal{H}^-$ est paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = (2 \sinh t, -5 \cosh t)$ ou par $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \gamma(t) = (2 \tan t, -\frac{5}{\cos t})$. Pour démontrer que ce sont des paramétrages de $\mathcal{H}^-$, il faut d'abord montrer que l'image $c(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ (resp. l'image $\gamma(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$) est incluse dans $\mathcal{H}^-$. Puis il faut montrer que tout point $(x, y) \in \mathcal{H}^-$ s'écrit sous la forme $c(t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$ (resp. sous la forme $\gamma(t)$, $t \in] - \pi/2, \frac{\pi}{2}[$). Autrement dit, il faut montrer que c est surjective sur $\mathcal{H}^-$. Ceci a été détaillé en cours.

Exercice 2 ($\simeq$ 6 points) :
1) Donner le plan d'étude d'une courbe paramétrée vu en cours.
2) Étudier (et tracer) la courbe paramétrée $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos 3t, \sin 6t)$ en respectant le plan d'étude et en suivant les indications ci-dessous.

Indications pour la recherche des points non biréguliers :
a) *On* **montrera** *que la fonction $x'y'' - x''y'$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 54 \sin 3t \sin 6t + 54 \cos 3t$$

et s'annule en $t = \frac{\pi}{6}$.
b) *On* **admettra** *que sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, cette fonction a un seul zéro en $t = \frac{\pi}{6}$, et qu'elle change de signe en ce point. Et on* **calculera** *$c'(\pi/6)$, $c''(\pi/6)$, $c'''(\pi/6)$.*
c) (Question bonus facultative, hors barème) *Montrer que $x'y'' - x''y'$ n'a qu'un seul zéro sur $[0, \pi/3]$. Montrer par exemple que $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 27(3 \cos 3t - \cos 9t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

CORRIGÉ Étape 1 : recherche des périodes et symétries. Restriction du domaine d'étude. La fonction $x : t \mapsto \cos 3t$ est périodique de période $2\pi/3$ et la fonction $y : t \to \sin 6t$ est périodique de période $\pi/3$. La courbe paramétrée c est donc périodique de période $2\pi/3$. On l'étudie donc sur un intervalle de longueur $2\pi/3$.

De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire. Si $t \in \mathbb{R}$, le point $c(-t)$ est donc le symétrique du point $c(t)$ par la symétrie d'axe $(0x)$.

On peut donc étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/3]$, la tracer pour $t \in [0, \pi/3]$, puis effectuer cette symétrie d'axe $(0x)$ pour récupérer le tracé sur tout l'intervalle $[-\pi/3, \pi/3]$.

Étape 2 : étude des variations des fonctions coordonnées, recherche des points singuliers. Sur $[0, \pi/3]$, la fonction x est strictement décroissante de 1 à -1. Sa dérivée x' vérifie $x'(t) = -3\sin 3t$. Elle est négative sur cet intervalle, et s'annule en $t = 0$. La fonction y est croissante de 0 à 1 sur $[0, \pi/12]$, puis décroissante de 1 à -1 sur $[\pi/12, \pi/4]$, puis croissante de -1 à 0 sur $[\pi/4, \pi/3]$. Sa dérivée vaut $y'(t) = 6\cos 6t$. Elle est positive sur $[0, \pi/12]$, s'annule en $t = \pi/12$, est négative sur $[\pi/12, \pi/4]$, puis s'annule en $\pi/4$ et est positive jusqu'en $\pi/3$.

En particulier, le vecteur dérivé $c'(t)$ ne s'annule pas sur $[0, \pi/3]$. Il n'y a donc pas de point singulier, et le premier entier caractéristique p vaut $p = 1$ en tout $t \in [0, \pi/3]$.

étape 3 : Recherche et étude des points non biréguliers. On utilise ici les indications de l'énoncé. D'après ci-dessus, $p = 1$, donc les seules possibilités de points non biréguliers sont les points d'inflexion. On doit donc chercher les $t \in [0, \pi/3]$ tels que $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ s'annule en changeant de signe. On suit pour cela les indications de l'énoncé. **a)** On a $x'(t) = -3\sin 3t$, $x''(t) = -9\cos 3t$, $y'(t) = 6\cos 6t$ et $y''(t) = -36\sin 6t$. D'où

$$\begin{aligned} x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= 108\sin 3t\sin 6t + 54\cos 3t\cos 6t = 54\sin 3t\sin 6t + 54(\cos(6t - 3t) \\ &= 54\sin 3t\sin 6t + 54\cos 3t, , \end{aligned}$$

et cette quantité s'annule en $t = \frac{\pi}{6}$ car $\sin 6\pi/6 = \cos 3\pi/6 = 0$.

b) On **admet** que sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, cette fonction a un seul zéro en $t = \frac{\pi}{6}$, et qu'elle change de signe en ce point. Et on **calcule** $c'(\pi/6) = (-3, -6)$, $c''(\pi/6) = (0, 0)$, $c'''(\pi/6) = (27, 216)$. On vérifie immédiatement que $c'(\pi/6)$ et $c'''(\pi/6)$ sont indépendants, d'où le deuxième entier caractéristique en $t = \pi/6$ vaut $q = 3$. Autrement dit, la courbe a un point d'inflexion en $\pi/6$.

étape 4 : étude des branches infinies. Ici il n'y en a pas, car les deux fonctions coordonnées sont bornées. La courbe ne peut donc pas partir à l'infini.

étape 5 : Exercice. On place les points $c(0) = (1, 0)$, $c(\pi/6) = (0, 0)$, $c(\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -1)$, $c(\pi/3) = (-1, 0)$, et les tangentes $c'(0) = (0, 6)$, $c'(\pi/6) = (-3, -6)$, $c'(\pi/4) = (-3\sqrt{2}/2, 0)$, $c'(\pi/3) = (0, 6)$ en ces points. Puis on interpole la courbe. On n'oublie pas ensuite d'effectuer la symétrie par rapport à (Ox). On obtient une *courbe de Lissahoux*, ou encore une "fleur" à deux pétales.

Exercice 3 ($\simeq$ 6 points) :
a) Donner rapidement la définition, le domaine de définition, les propriétés remarquables, la dérivée et l'allure (schématique) du graphe de $x \mapsto \arcsin x$.
b) Donner le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$ de la courbe paramétrée par $t \in D \mapsto (\arcsin t, \frac{1}{t^2(t^2-1)})$.
c) Étudier et tracer cette courbe en suivant le plan d'étude vu en cours.
Indication: On admettra que la fonction $x'y'' - x''y'$ est strictement négative sur son ensemble de définition.

a) Par définition, arcsin est la fonction réciproque (inverse) de la restriction de sin à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. C'est donc une bijection continue de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Elle n'est pas dérivable en ± 1 (tangentes verticales). Elle est impaire, comme sin. Son graphe est le symétrique de celui de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
b) La courbe $c : t \in D \mapsto (\arcsin t, \frac{1}{t^2(t^2-1)})$ est définie sur $]-1, 1[$. En effet, sa première coordonnée est définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et sa deuxième coordonnée est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
c) Étape 1. La fonction $x : t \mapsto \arcsin t$ est impaire et la fonction y est paire. Le point $c(-t)$ est donc le symétrique de $c(t)$ par la symétrie d'axe $(0y)$.On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $]0, 1[$. On aura ainsi tout le tracé après symétrie par rapport à $(0y)$.

étape 2 La fonction arcsin est croissante strictement de 0 à $\pi/2$ sur $]0, 1[$ (voir question a). Sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

La fonction $y : t \in]0, 1[\mapsto \frac{1}{t^2(t^2-1)}$ a pour dérivée $y'(t) = \frac{-2t(2t^2-1)}{t^4(t^2-1)^2}$. Cette fonction y' est positive si $t \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et est négative après. La fonction y est donc croissante de $-\infty$ à -1, puis décroissante de -1 à $-\infty$. De plus, il y a une tangente horizontale en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en $c(\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\pi/4, -1)$.

Comme x' ne s'annule pas, tous les points sont réguliers.

étape 3 : Il n'y a pas de point singulier d'après ci-dessus. Comme x' est toujours non nul, on a toujours $c'(t) \neq \vec{0}$. Autrement dit, les seuls points non biréguliers possibles sont des points d'inflexion. On cherche donc s'il existe un point d'inflexion. On doit calculer la quantité $x'y'' - x''y''$, et regarder si elle s'annule en changeant de signe. D'après l'indication de l'énoncé, elle ne s'annule pas . Pas de point d'inflexion donc.

étape 4 Il y a 2 branches infinies, quand $t \to 0$ et $t \to 1$; dans les deux cas, $y(t)$ tend vers $-\infty$ alors que $x(t)$ tend vers une limite finie. Quand $t \to 0$, la droite $x = 0$ est asymptote à la courbe. Quand $t \to 1$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.

étape 5 tracé très facile vues les deux asymptotes et la tangente horizontale au point $c(1/\sqrt{2}) = (\pi/4, -1)$. On n'oublie pas ensuite de faire la symétrie par rapport à $(0y)$ pour obtenir le graphe complet.