Université Picardie Jules Verne — Faculté de Mathématiques et Informatique
Licence 1 Semestre 2 — « Méthodes expérimentales » 2005

Corrigé du Partiel de Méthodes expérimentales - Mardi 29 mars

Question de cours : Une *courbe paramétrée plane* est la donnée d'une application **continue** $c : t \in I \mapsto c() \in \mathbb{R}^2$ d'un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Question de TP :

```
>plot([sinh(x),cosh(x)],x=-5..5,y=-10..10);
```

Exercice 1 : 0) La courbe est définie par une équation du second degré. C'est une **conique**.
1) On veut réduire l'équation de la conique. Il n'y a pas de terme en « xy ». On cherche à éliminer les termes en x et en y. On a $25y^2 - 9x^2 - 350y - 36x + 964 = 25(y-7)^2 - 9(x+2)^2 - 9 \times 25$. Soit $O'(7, -2)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient (X, Y) les coordonnées du point $M(x, y)$ dans le nouveau repère $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a $X = x + 2$ et $Y = y - 7$. Dans $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation de $\mathcal{C}$ devient $25Y^2 - 9X^2 = 225$, soit encore $\dfrac{Y^2}{9} - \dfrac{X^2}{25} = 1$. C'est l'équation d'une hyperbole.
2) Les asymptotes ont pour équations $Y = \pm\frac{3}{5}X$. Les sommets ont pour coordonnées $(0, \pm 3)$. L'axe focal est l'axe des ordonnées. Les foyers ont pour coordonnées $(0, \pm c)$ avec $c = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Exercice 2 :1) Pour translater le graphe de f de 1 vers le haut et de 2 vers la droite, on considère la fonction $x \in [2, 2 + 2\pi] \mapsto 1 + \cos(x - 2)$.
2) On considère le graphe de $x \in [0, 6\pi] \mapsto \cos(\frac{x}{3})$.

Exercice 3 (7 points) : Étudions la courbe paramétrée par

$$c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) := \left(x(t) = \cosh t,\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \arctan t \right)$$

Étape 1: la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto c(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas périodique. La fonction $t \mapsto x(t)$ est paire. La fonction y est impaire. On en déduit que la courbe est invariante par la symétrie d'axe $(0x)$, et qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

Étape 2 : Les fonctions coordonnées x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = \sinh t$ et $y'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}(2\arctan t + t)$. La fonction x' s'annule en $t = 0$, puis est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction x est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle vaut 1 en $t = 0$, et tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$. La fonction y' est positive sur $\mathbb{R}_+$ (rappelons que si $t \geq 0$, alors $\arctan t \geq 0$), s'annule en $t = 0$ seulement. La fonction y est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, vaut 0 en 0 et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $t \to +\infty$. On peut faire le tableau de variation. On remarque que la courbe admet un unique point singulier, en $t = 0$, puisque $\overrightarrow{c'(0)} = \vec{0}$.

Étape 3 : Étudions les points non biréguliers. L'indication de l'énoncé nous dit que les seuls points non biréguliers sont $c(0)$ et $c(t_1)$. Calculons $x''(t) = \cosh t$, et $y''(t) = \frac{2}{(1+t^2)^3}\left(t(1-t^2) + (1-3t^2)\arctan t\right)$.
Étudions la courbe au voisinage de $t = 0$. On a $c'(0) = \vec{0}$, $c''(0) = (1, 0)$, d'où $p = 2$ et la tangente en $t = 0$ est horizontale, dirigée par $c''(0)$. En utilisant le fait que $x'''(t) = \sinh t$, donc $x'''(0) = 0$, et l'indication donnant $y'''(0) = 6$, on voit que $c'''(0) = (0, 6)$ n'est pas colinéaire à $c''(0)$, d'où $q = 3$. Le point $c(0)$ est donc un **point de rebroussement de première espèce**.
Étudions la courbe au voisinage de $t = t_1$. On a $c'(t_1) \neq \vec{0}$ d'après les indications, d'où $p = 1$. Les indications nous disent aussi que le déterminant de c' et c'' s'annule en changeant de signe en $t = t_1$, c'est donc un **point d'inflexion**. Calculons tout de même l'entier q pour vérifier. On sait que $\det(c'(t_1), c''(t_1)) = 0$, donc $c''(t_1)$ est colinéaire à $c'(t_1)$, donc $q > 2$. Mais manifestement, $c''(t_1)$ n'est pas colinéaire à $c'(t_1)$, donc $q = 3$. C'est bien un point d'inflexion.

Indications pour l'étape 3 : La fonction $t \mapsto \det(c'(t), c''(t))$ est décroissante sur $]-\infty, -t_0]$, croissante sur $[-t_0, 0]$, décroissante sur $[0, t_0]$, puis croissante sur $[t_0, +\infty[$, avec $t_0 \simeq 0.3$. Cette même fonction s'annule sans changer de signe en 0 et s'annule en changeant de signe en $-t_1$ et t_1 avec $t_1 \simeq 0.5$. On donne $y'''(0) = 6$. On a également $x(t_1) \simeq 1.13$, $y(t_1) \simeq 0.1$, $x'(t_1) \simeq 0.53$, $y'(t_1) \simeq 0.46$, $x''(t_1) \simeq 1.13$, $y''(t_1) \simeq 0.99$, $x'''(t_1) \simeq 0.53$, $y'''(t_1) \simeq -2.44$.

Étape 4 Quand $t \to +\infty$, $x(t) \to +\infty$. La courbe admet donc une branche infinie en $+\infty$. De plus

Étape 5. Tracez la courbe, en plaçant les asymptotes, les points non biréguliers et la tangente en $c(0)$, et en$c(t_1)$.

Exercice 4 : On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Δ la droite d'équation $x = 1$, et D_θ la droite passant par l'origine, et faisant un angle $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ avec l'axe $(0x)$ (et donc de pente $\tan\theta$). On note $A(\theta)$ le point d'intersection de D_θ et Δ, et $M(\theta)$ le point de D_θ tel que

$$AM(\theta) = 2 \quad \text{et} \quad A \in [0M(\theta)].$$

1) Le point $A(\theta)$ a pour abscisse 1, et il est sur la droite de pente $\tan\theta$, donc $A(\theta) = (1, \tan\theta)$. La distance $OA(\theta)$ vérifie $OA(\theta) = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{1}{\cos\theta}$ (car $\cos\theta > 0$ quand $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$). On a $\overrightarrow{0M(\theta)} = \frac{0A(\theta)+2}{0A(\theta)}\overrightarrow{OA(\theta)}$ d'où $M(\theta) = (1 + 2\cos\theta, \tan\theta + 2\sin\theta)$. Autrement dit, la courbe décrite par $M(\theta)$ quand θ varie est paramétrée par

$$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto (1 + 2\cos\theta, \tan\theta + 2\sin\theta)\,.$$

2) Études cette courbe.

Étape 1 : les fonctions coordonnées sont périodiques de période 2π, mais la courbe est définie sur $-\pi/2, \pi/2[$. Elle n'a donc pas de période sur cet intervalle. La fonction $x : \theta \mapsto 1 + 2\cos\theta$ est paire, et $y : \theta \mapsto \tan\theta + 2\sin\theta$ est impaire. La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $(0x)$ et on peut l'étudier sur $[0, \pi/2[$.

Étape 2 : x et y sont dérivables sur cet intervalle, et on a pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$, $x'(\theta) = -2\sin\theta$ et $y'(\theta) = 1 + \tan^2\theta + 2\cos\theta$. La fonction x' est négative et s'annule seulement en $t = 0$. Donc la fonction x est décroissante sur $[0, \pi/2[$, vaut 3 en 0 et tend vers 1 quand $t \to \pi/2$. La fonction y' est positive et s'annule seulement en $\theta = 0$, donc y est croissante sur $[0, \pi/2[$, vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ quand $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Il n'y a aucun point singulier.

Étape 3 : on calcule $x''(\theta) = -2\cos\theta$ et $y''(\theta = 2\frac{\tan\theta}{\cos\theta} - 2\sin\theta$. On en déduit que

$$\det(c'(\theta), c''(\theta)) = 6 - 4\tan^2\theta\,.$$

Ce déterminant s'annule (en changeant de signe) ssi $\tan\theta = \sqrt{3/2}$, soit (voir les indications) ssi $\theta = \theta_0$. Il s'annule en changeant de signe, la courbe a donc un point d'inflexion en $c(\theta_0)$.

Étape 4. Il y a une branche infinie quand $\theta \to \pi/2$ puisque $y(\theta) \to +\infty$. De plus, $x(\theta) \to 1$ quand $\theta \to \pi/2$, d'où la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ en $\theta = \pi/2$.

Étape 5: on trace la courbe en dessinant l'asymptote, le point $c(0)$ et la tangente en ce point, le point $c(\theta_0)$ et la tangente en ce point.

Indications : $\theta_0 = \arctan\sqrt{3/2} \simeq 0.88$, $c(\theta_0) \simeq (2.26, 2.77)$, $c'(\theta_0) \simeq (-1.55, 3.76)$.