Corrigé de l'examen de Méthodes expérimentales -1ère session- Mercredi 31 mai 2005 16h30-18h30

Question de cours : Une *courbe paramétrée par son abscisse curviligne* est une courbe paramétrée $c : t \in I \to c(t)$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in I$ on ait $\|\overrightarrow{c'(t)}\| = 1$.

Exercice 1 : a) Une courbe paramétrée en coordonnées polaires ne peut avoir de point de rebroussement de première espèce que lors d'un passage au pôle.
Elle ne peut jamais avoir de point de rebroussement de deuxième espèce.
Elle peut avoir un point d'inflexion en tout point différent du pôle.

b) On vérifie aisément que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = (x+1)(-35x+73)$. La fonction ψ s'annule donc en -1 et en $73/3 > 1$. Elle a donc un seul zéro dans $[-1, 1]$.

c) Étape 1 : ρ est périodique de période $\pi/3$. On étudie donc la courbe sur un intervalle de longueur $\pi/3$, par exemple $[0, \pi/3]$, puis on complètera le tracé par les rotations d'angle $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$. Il n'y a pas de symétrie apparente.

Étape 2 : on calcule $\rho'(\theta) = 6\cos 6\theta$ et on fait le tableau des variations de ρ. La dérivée ρ' est positive sur $[0, \pi/12$, s'annule en $\pi/12$, est négative sur $[\pi/12, \pi/4]$ s'annule en $\pi/4$ et est positive sur $[\pi/4, \pi/3]$. La fonction ρ est donc croissante puis décroissante puis croissante sur ces mêmes intervalles, et s'annule en $\pi/4$. Elle admet un maximum global en $\pi/12$, où la tangente à la courbe est donc orthogonale au vecteur $\overrightarrow{Oc(\pi/12)}$. Elle admet un minimum global en $\pi/4$, qui correspond à un passage au pôle.

Étape 3 : La courbe passe au pôle en $\theta = \pi/4$; en ce point, la tangente est la droite de direction $\theta = \pi/4$. Pour étudier l'allure de la courbe, on étudie le signe de ρ au voisinage de $\pi/4$. La fonction ρ est positive au voisinage de $\pi/4$, la courbe admet donc un point de rebroussement de première espèce.

Étape 4 : On cherche les points d'inflexion en dehors du pôle. Autrement dit, on cherche s'il existe un $\theta \neq \pi/4$ en lequel la fonction $\varphi : \theta \mapsto \rho^2(\theta) + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)$ s'annule en changeant de signe. Or $\rho'(\theta) = 6\cos 6\theta$ et $\rho''(\theta) = -36 \sin 6\theta$ d'où $\varphi(\theta) = 73 + 38\sin 6\theta - 35\sin^2 6\theta = \psi(\sin 6\theta)$. La fonction φ s'annule en θ si et seulement si la fonction ψ s'annule en $\sin 6\theta$. On déduit de la question b) que φ s'annule si et seulement si $\sin 6\theta = -1$, soit encore $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Or en $\theta = \pi/4$ la courbe passe au pôle. Elle ne peut donc pas avoir de point d'inflexion.

Étape 5 : la fonction ρ est définie sur tout l'intervalle fermé $[0, \pi/3]$, il n'y a donc pas de branche infinie.

Étape 6 : tracé. La courbe ressemble à une fleur à 6 pétales. Pour la tracer, tracez d'abord les cercles de centre 0 et de rayons 1 et 2. Tracez également toutes les droites passant par 0 d'angles multiples de $\pi/12$. Vous pouvez maintenant tracer la courbe en vous aidant du tableau de variations: c'est une fleur dont les sommets des pétales sont en $\pi/12$, $5\pi/12$, $3\pi/4$, $13\pi/12$, $17\pi/12$ et $21\pi/12$.

Exercice 2 : La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$. La fonction sinh est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. La courbe c est donc définie sur $D =]-1, 1[$.

Étape 1 : la courbe n'est pas périodique. La fonction $x : t \in D \mapsto \arcsin t$ est impaire, et la fonction $y : t \in D \mapsto \frac{1}{\sinh(1-t^2)}$ est paire. La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe (Oy) et il suffit de l'étudier sur $[0, 1[$.

Étape 2 : On calcule $x'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $y'(t) = \frac{2t\cosh(1-t^2)}{\sinh^2(1-t^2)}$. On en déduit que x' est positive et ne s'annule pas sur $[0, 1[$, donc x est strictement croissante et vaut 0 en 0. De même, y' est positive, et s'annule en 0. Donc y est croissante. La fonction x tend vers $\pi/2$ en 1 et la fonction y tend vers $+\infty$ quand $t \to 1$. La courbe n'admet par ailleurs aucun point singulier.

Étape 3 : Pour chercher les points non biréguliers, on cherche si la quantité $t \mapsto x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ s'annule. Si elle s'annule en changeant de signe, on sait qu'il s'agit d'un point d'inflexion. Si elle s'annule sans changer de signe, on calcule les entiers p et q définis en cours, et selon leur parité (cf cours) on détermine s'il s'agit d'un point d'inflexion, de rebroussement de première ou de seconde espèce, ou d'un point ordinaire. Ici, on admet que la courbe n'admet pas de point non birégulier.

Étape 4 : Quand $t \to 1$, $x(t) \to \pi/2$ et $y(t) \to +\infty$, la courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = \pi/2$.

Étape 5 : Le tracé est très simple à partir de la tangente (horizontale) en $t = 0$, de l'asymptote trouvée ci-dessus, et de la symétrie.

Exercice 3 : a) $\mathcal{H}$ est une conique.

b) L'équation de l'ensemble $\mathcal{H}$ se réécrit $16(x+2)^2 - 25(y-3)^2 = 400$, soit encore $\dfrac{x'^2}{25} - \dfrac{y'^2}{16} = 1$ si (x', y') sont les coordonnées du point $M(x,y)$ dans le repère $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $O'(-2,3)$. C'est l'équation d'une *hyperbole* de sommets $(\pm 5, 0)$, d'asymptotes $y = \pm\frac{4}{5}x$, de centre O' et de foyers $(\pm\sqrt{41}, 0)$.

c) Si $c(t) = (5\cosh t, 4\sinh t)$, on vérifie aisément que $c(t) \in \mathcal{H}$. Réciproquement, si $M(x,y) \in \mathcal{H}$ et $x \geq 0$, comme la fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = 4\sinh t$. Comme $x \geq 0$, on a aussi $x = 5\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{16}} = 5\sqrt{1+\sinh^2 t} = 5\cosh t$. La trajectoire de la courbe $(c(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est donc la branche droite $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ de l'hyperbole.

d) On calcule $c'(t) = (5\sinh t, 4\cosh t)$ d'où $\|c'(t)\| = \sqrt{41\sinh^2 t + 16}$. La longueur de la courbe est donc donnée par

$$L(c_{|[0,1]}) = \int_0^1 \|c'(u)\|\, du = \int_0^1 \sqrt{41\sinh^2 u + 16}\, du\,.$$

e) On a $\varphi(t) = s = \int_0^t \|c'(u)\|\, du$. Puis $\overrightarrow{\gamma'(s)} = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\|c'(\varphi^{-1}(s))\|} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. En dérivant encore une fois, on trouve $\overrightarrow{\gamma''(s)}) = \frac{c''(t)}{\|c'(t)\|^2} - \varphi''(t)\,\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|^3}$.

En $t = 0$, on a $\overrightarrow{c'(0)} = (0,4)$, $\overrightarrow{c''(0)} = (5,0)$, $\|\overrightarrow{c'(0)}\| = 4$, $\varphi''(0) = 0$, $\gamma''(0) = \frac{1}{16}(5,0)$. On en déduit que $C(0) = \|\overrightarrow{\gamma''(0)}\| = \frac{5}{16}$, $R(0) = \frac{16}{5}$, $\vec{n_0} = (1,0)$, $\Omega(0) = (\frac{16}{5} + 5, 0)$.