

**Corrigé de l'examen de Méthodes expérimentales -2ème session- Mercredi 22 juin 2005
16h30-18h30**

Question de cours : Une *conique plane* est un ensemble du plan défini par une équation polynomiale du second degré.

Exercice 1 : a) La fonction arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$. Elle est donc définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$. Sa dérivée sur $] -1, 1[$ vaut $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction arccos n'est ni paire, ni impaire, mais elle vérifie $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

La fonction cosh est définie sur \mathbb{R} par $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vaut $\cosh'(x) = \sinh(x)$. La fonction cosh est paire.

b) La courbe est définie sur $D = [-1, 1]$.

c) étape 1: périodes et symétries, étape 2 variations de x et y , recherche des points singuliers étape 3 recherche des points non biréguliers, étape 4 étude des branches infinies étape 5 tracé de la courbe.

d) Étape 1: la courbe n'a pas de période. Mais on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $(0x)$, et on peut restreindre notre étude à l'intervalle $[0, 1[$.

Étape 2: on calcule $x'(t) = \sinh(t)$ qui est positive sur $[0, 1]$ et nulle en 0 et pour $t < 1$ $y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est strictement négative sur $[0, 1[$. Le tableau de variation est donc très simple sur $[0, 1]$: x est croissante de 1 à $\cosh(2)$, et y décroît de 0 à $-\frac{\pi}{2}$. Il n'y a pas de point singulier.

Étape 3: on utilise l'indication. Les points non biréguliers sont les points en lesquels la quantité $x'y'' - x''y'$ s'annule. Il y a un seul point **non** birégulier sur $[0, 1[$, en $t = t_0$. En ce point, la fonction $x'y'' - x''y'$ s'annule en changeant de signe, la courbe admet donc un point d'inflexion. Par ailleurs, la fonction y n'est pas dérivable en $t = 1$, c'est donc un point singulier de la courbe. Mais on peut montrer qu'en ce point la courbe admet une tangente verticale.

Étape 4: les fonctions coordonnées x et y sont bien définies, et donc finies sur l'intervalle $[0, 1]$. Il n'y a donc pas de branche infinie.

Étape 5: à l'aide du tableau de variation, de la symétrie par rapport à $(0x)$, des tangentes en $t = 0$ et $t = 1$ (verticales) et du point d'inflexion en t_0 , vous avez tous les éléments pour tracer la courbe.

Exercice 2 : a) étape 1: périodes et symétries, étape 2 variations de ρ , recherche des passages au pôle et des maxima/minima de ρ , étape 3 étude des passages au pôle (étude du signe de ρ) étape 4 recherche des points d'inflexion en dehors du pôle, étape 5 étude des branches infinies étape 6 tracé de la courbe.

b) étape 1: la fonction ρ est périodique de période $\frac{\pi}{3}$, on peut donc étudier la courbe sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{3}$, par exemple $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, puis compléter le tracé à l'aide de rotations d'angle $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$, et $\frac{5\pi}{3}$. Par ailleurs, on remarque que la fonction ρ est paire. La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $\theta = 0$, et on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$.

étape 2: on a $\rho'(\theta) = -6 \sin 3\theta \cos 3\theta = -3 \sin 6\theta$. Donc $\rho'(\theta) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{6}]$. La fonction ρ décroît donc de 2 à 1 sur $[0, \frac{\pi}{6}]$. En particulier, la courbe ne passe pas au pôle puisque ρ ne s'annule pas. La fonction ρ admet un maximum en $\theta = 0$ et un minimum en $\theta = \frac{\pi}{6}$. En ces points, $\rho'(\theta) = 0$, la tangente est donc orthogonale au rayon $Oc(\theta)$.

étape 3: il n'y a pas de passage au pôle.

étape 4: on cherche les points d'inflexion. La courbe a un point d'inflexion en $c(\theta)$ ssi la fonction $\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''$ s'annule en changeant de signe en θ . D'après l'indication (1), la courbe a donc un point d'inflexion unique en $\theta = \theta_1$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$. En ce point, on a $c(\theta_1) \simeq (3\pi/25, 1.2)$.

étape 5: la fonction ρ est bien définie sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, il n'y a donc pas de branche infinie.

étape 6: tracé. ρ varie entre 1 et 2, la courbe est donc comprise entre les cercles $C(O, 1)$ et $C(O, 2)$, que l'on trace d'abord. On place ensuite les points $c(0), c(\theta_1), c(\frac{\pi}{6})$. En $\theta = 0$ la tangente est orthogonale à $\overrightarrow{Oc(0)}$ donc verticale. En $\theta = \frac{\pi}{6}$ la tangente est orthogonale à $\overrightarrow{Oc(\frac{\pi}{6})}$, donc tangente au cercle $C(O, 2)$. En $\theta = \theta_1$ la courbe a un point d'inflexion. Ceci permet de tracer la courbe sur $[0, \frac{\pi}{6}]$. On effectue ensuite la symétrie par rapport à la droite d'équation $\theta = 0$, puis on complète le tracé par des rotations.

Exercice 3 : On réduit l'équation définissant \mathcal{E} pour obtenir $\frac{(x-7)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$. On se place donc dans le

équation de l'ensemble \mathcal{E} dans ce nouveau repère est $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} = 1$. C'est l'équation d'une ellipse, de directions principales les axes (OX) et (OY) . Les sommets ont pour coordonnées $(\pm 6, 0)$. Les foyers ont pour coordonnées $(\pm c, 0)$, avec $c^2 = a^2 - b^2$, soit encore $c = 5$. Les directrices ont pour équation $X = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{36}{5}$. La courbe n'a pas de branches infinies, donc pas d'asymptotes. Le centre (de symétrie) de l'ellipse est l'origine O' du nouveau repère. L'excentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{9}$. On peut paramétrer l'ellipse par exemple par $t \in [0, 2\pi] \mapsto (6 \cos t, 3 \sin t)$. On a toutes les infos pour tracer la courbe (cf cours).

Exercice 4 : a) On remarque que $\frac{(x(t))^2}{2} = y(t)$, cette courbe est donc une parabole.

b) Sa longueur entre -2 et 2 vaut

$$\begin{aligned} L(c|_{[-2,2]}) &= \int_{-2}^2 \|c'(t)\| dt = \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \int_{-\operatorname{argsh}(2)}^{\operatorname{argsh}(2)} \sqrt{1+\sinh^2 u} \cosh u du = \int_{-\operatorname{argsh}(2)}^{\operatorname{argsh}(2)} \cosh^2 u du \\ &= \int_{-\operatorname{argsh}(2)}^{\operatorname{argsh}(2)} \frac{1+\cosh(2u)}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh(2u)}{4} \right]_{-\operatorname{argsh}(2)}^{\operatorname{argsh}(2)} = \operatorname{argsh}(2) + \frac{\sinh(2\operatorname{argsh}(2))}{2} \simeq 5.91 \end{aligned}$$

c) On a $\varphi(t) = s = \int_0^t \|c'(u)\| du$, et $\varphi'(t) = \|c'(t)\|$. On a aussi $c(t) = (t, \frac{t^2}{2})$, $\overrightarrow{c'(t)} = (1, t)$, $\|\overrightarrow{c'(t)}\| = \sqrt{1+t^2}$, $\overrightarrow{c''(t)} = (0, 1)$, $\|\overrightarrow{c''(t)}\| = 1$, $\varphi''(t) = \|\overrightarrow{c''(t)}\| = \sqrt{1+t^2}$, et $\varphi'''(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Puis on calcule $\overrightarrow{\gamma'(s)} = \frac{c'(\varphi^{-1}(s))}{\|c'(\varphi^{-1}(s))\|} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. En dérivant encore une fois, on trouve $\overrightarrow{\gamma''(s)} = \frac{c''(t)}{\|c'(t)\|^2} - \varphi''(t) \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|^3}$. Or en $t = 0$, on a donc $\overrightarrow{c'(0)} = (1, 0)$, $\overrightarrow{c''(0)} = (0, 1)$, $\|\overrightarrow{c'(0)}\| = 1$, $\varphi''(0) = 0$, d'où $\overrightarrow{\gamma'(0)} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{\gamma''(0)} = (0, 1)$. On en déduit que $C(0) = \|\overrightarrow{\gamma''(0)}\| = 1$, $R(0) = 1$, $\vec{n}_0 = (0, 1)$, $\Omega(0) = (0, 1)$.