

Corrigé de l'examen de Méthodes expérimentales -2ème session - 27 Juin 2007

Question de cours (2 points)

- a) Qu'est-ce qu'une courbe paramétrée par abscisse curviligne?
b) Qu'est-ce la courbure $C(t)$ au point $c(t)$ d'une courbe $t \in I \mapsto c(t)$ paramétrée par abscisse curviligne?

CORRIGE: voir cours.

Exercice 1 (6 points) : Soit $1 \leq a \leq 2$ un paramètre fixé, et \mathcal{C}_a la courbe définie dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ par l'équation

$$4x^2 - 16x + a^2y^2 + 6a^2y + 16 + 5a^2 = 0.$$

- a) Quel est le nom de ce type de courbe?
b) Trouver un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel cette courbe admet une équation réduite.
c) Dans ce nouveau repère, trouver un paramétrage injectif de la courbe \mathcal{C}_a en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire un paramétrage injectif $c : t \in I \mapsto (X(t), Y(t)) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'image $c(I)$ de la courbe paramétrée soit égale à l'ensemble \mathcal{C}_a . Justifier soigneusement que le paramétrage c convient.
d) À l'aide de ce paramétrage, donner une expression de la longueur $l(\mathcal{C}_a) = l(c_I)$.
e) Pour quelle valeur de $1 \leq a \leq 2$ cette longueur est-elle maximale? La calculer dans ce cas.

CORRIGE: **a)** C'est une conique. **b)** L'équation de \mathcal{C}_a s'écrit $4(x^2 - 4x + 4) + a^2(y^2 + 6y + 9) - 4a^2 = 0$, soit encore $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$. Posons $\Omega = (2, -3)$, $X = x - 2$ et $Y = y + 3$. Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, \mathcal{C}_a a pour équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{4} = 1$. C'est une ellipse.

c) Montrons que $c : t \in [0, 2\pi[\mapsto (a \cos t, 2 \sin t) \in \mathbb{R}^2$ est un paramétrage injectif de la courbe. D'abord, pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $\frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{4 \sin^2 t}{4} = 1$ donc $c(t) \in \mathcal{C}_a$ donc $c([0, 2\pi[) \subset \mathcal{C}_a$. Réciproquement, si $M(X, Y) \in \mathcal{C}_a$, on a $|\frac{X}{a}| \leq 1$. Il existe donc un unique $t \in [0, \pi[$ tel que $\cos t = \frac{X}{a}$ (cos est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.) D'autre part, $Y = \pm 2\sqrt{1 - X^2/a^2}$ d'où $Y = \pm 2 \sin t$. Si $Y \geq 0$, alors $Y = 2 \sin t$ et $X = a \cos t$, soit encore $M = c(t)$. Sinon, si $Y < 0$, alors $Y = -2 \sin t = 2 \sin(2\pi - t)$ et $X = \cos(t) = \cos(2\pi - t)$. Donc $\mathcal{C}_a \subset c([0, 2\pi[)$. Pour finir, vérifions que c est injective. Si $c(t) = c(s)$ avec $t \in [0, \pi[$ et $s \in [0, \pi[$, alors $\cos t = \cos s$ donc $t = s$ ou $t = 2\pi - s$. De plus $\sin t = \sin s$ implique que $t = s$ ou $t = \pi - s$. Donc finalement $t = s$, ce qui prouve l'injectivité de c .

d) $l(\mathcal{C}_a) = l(c_{[0, 2\pi[}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt$. Cette longueur est maximale lorsque $a = 2$. Dans ce cas, elle vaut $l(\mathcal{C}_a) = 4\pi$. On retrouve le périmètre d'un cercle de rayon 2.

Exercice 2 (9,5 points) : Soit c la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par

$$c : t \in D \mapsto \left(x(t) = \operatorname{argch}(t^2), y(t) = \frac{10}{t^2 + 1} + 2 \ln(t) \right).$$

- a) Rappeler les cinq étapes du plan d'étude d'une telle courbe.
b) Comment est définie la fonction argch ? On donnera sa **définition**, son **domaine de définition**, sa **dérivée**, l'allure de son **graphe**, et ses **limites** éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
c) Quel est l'ensemble de définition D de la courbe c ?
d) Soit $x > 1$ un réel. En utilisant le fait que $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) = x$, montrer que

$$\frac{\exp(\operatorname{argch}(x))}{2x} \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad x \rightarrow +\infty.$$

En déduire que $\operatorname{argch}(x) - \ln(x) \rightarrow \ln(2)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis que $\frac{\operatorname{argch}(x)}{\ln(x)} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow \infty$.

- e) Que faut-il faire pour chercher les points singuliers et les points réguliers non biréguliers de la courbe? Montrer que la courbe n'admet pas de point singulier à l'intérieur de son domaine de définition.

On ADMETTRA sans calculs que la courbe admet un unique point régulier non birégulier, qui est un point d'inflexion sur \mathbb{R}_+ , en $t_0 \simeq 1,32$.

- f) Calculer $x'(t)$, $y'(t)$ et $\|c'(t)\|$. En déduire que

$$\sqrt{t-1}x'(t) \rightarrow 1, \quad y'(t) \rightarrow -3 \quad \text{et} \quad \sqrt{t-1}\|c'(t)\| \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow 1,$$

puis que le vecteur $(1, 0)$ est un vecteur directeur de la tangente en $c(1)$.

f) Faire l'étude complète de la courbe.

CORRIGE a) voir cours. **b)** argch est la réciproque de la restriction de ch à \mathbb{R}_+ . Elle est donc bijective de $[1, +\infty[$ sur \mathbb{R}_+ . Pour tout $t > 1$, sa dérivée vaut $\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Son graphe: voir cours S1 ou bouquins classiques. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{argch}x = +\infty$ et argch est continue en 1 et vaut $\operatorname{argch}1 = 0$.

c) On déduit de ci-dessus que c est définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

d) On note que $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}x) = x$, soit encore $\frac{e^{\operatorname{argch}x} + e^{-\operatorname{argch}x}}{2} = x$. Quand $x \rightarrow \infty$, on a $\lim \operatorname{argch}x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\operatorname{argch}x} = 0$. En divisant tout par x , on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\operatorname{argch}x}}{x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\operatorname{argch}x}}{2x} = 1$. En utilisant la continuité de la fonction \ln en 1, on obtient $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^{\operatorname{argch}x}}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{argch}x - \ln(2x) = \ln(1) = 0$. En notant que $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ et en divisant par $\ln x$, on obtient bien $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{argch}x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = 1$.

e) Un point singulier est un point $c(t)$ en lequel $c'(t) = \vec{0}$. Le tableau de variation nous montre qu'il n'y en a pas. Un point régulier non birégulier est un point en lequel $\det(c'(t), c''(t)) = 0$. Ici l'énoncé nous indique qu'il n'y en a qu'un sur $[1, +\infty[$, en t_0 .

f) On calcule $x'(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^4-1}} = \frac{2t}{\sqrt{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}}$. En multipliant par $\sqrt{t-1}$ on obtient tout de suite que $\sqrt{t-1}x'(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 1$. De même $y'(t) = \frac{-20t}{(t^2+1)^2} + \frac{2}{t} \rightarrow -3$ quand $t \rightarrow 1$. Un autre calcul donne

$\|c'(t)\| = \sqrt{\frac{4t^2}{(t-1)(t^3+t^2+t+1)} + \frac{400t^2}{(t^2+1)^4} + \frac{4}{t} - \frac{80}{(t^2+1)^2}}$, puis $\sqrt{t-1}\|c'(t)\| \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 1$. On en

déduit que $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \rightarrow (1, 0)$ quand $t \rightarrow 1$. Autrement dit, la tangente à la courbe au point $c(t)$ tend vers la droite passant par $c(1) = (0, 5)$ et de vecteur directeur $(1, 0)$. Ceci signifie que cette droite est la tangente en $c(1)$ à la courbe.

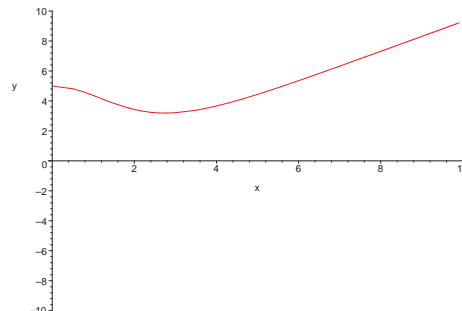
f) Étape 1: la courbe est définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. De plus $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc $c(t) = c(-t)$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur $[1, +\infty[$ pour obtenir la trajectoire complète (sans symétrie!)

Étape 2: On calcule $x'(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^4-1}}$. La dérivée est strictement positive sur $]1, +\infty[$ donc x est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de 0 à $+\infty$. y' s'annule lorsque $\frac{20t}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t}$, soit encore $t^4 - 8t^2 + 1 = 0$. Les zéros de la fonction $x \mapsto x^2 - 8x + 1 = 0$ sont $4 \pm \sqrt{15}$ et ceux de $t \mapsto t^4 - 8t^2 + 1$ sont $\pm\sqrt{4 \pm \sqrt{15}}$. Le seul dans $[1, +\infty[$ est $t_1 = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \simeq 2,80$. Et y' est négative pour $t \leq t_1$ puis positive. Donc y est décroissante sur $[1, t_1]$ de 5 à 3,19 et croissante ensuite et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Il n'y a pas de point tq $c'(t) = 0$ donc pas de point singulier.

Étape 3: l'énoncé nous apprend que le seul point non birégulier est un point d'inflexion en $t_0 \simeq 1,32$.

Étape 4: étude des branches infinies. Quand $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow +\infty$ et $y(t) \rightarrow \infty$. Donc $\|c'(t)\| \rightarrow \infty$, il y a donc une branche infinie. On calcule $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{10}{(t^2+1)\operatorname{argch}(t^2)} + \frac{\ln(t^2)}{\operatorname{argch}(t^2)}$. Le premier terme tend vers 0 car le dénominateur tend vers $+\infty$. Le deuxième terme tend vers 1 d'après la question d) appliquée à $x = t^2$. Il y a donc une direction asymptotique de pente 1. On calcule ensuite $y(t) - x(t) = \frac{10}{t^2+1} + \ln(t^2) - \operatorname{argch}(t^2)$. Le premier terme tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, et la différence $\ln(t^2) - \operatorname{argch}(t^2)$ tend vers $\ln(2)$ quand $t \rightarrow +\infty$. On en déduit que la courbe admet la droite d'équation $y = x + \ln(2)$ pour asymptote quand $t \rightarrow \infty$. De plus, on peut vérifier que la courbe est au dessus de son asymptote car $\frac{10}{t^2+1} \geq 0$ et $\ln(t^2) - \operatorname{argch}(t^2) \geq 0$, donc $y(t) \geq x(t) + \ln(2)$. (ceci se vérifie en regardant les signes des quantités dont on prend la limite à la question d).

Étape 5: tracé.



Exercice 3 (points) : Soit c la courbe paramétrée en coordonnées polaires par

$$c : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (\theta, r(\theta) = \sin^2(6\theta)).$$

a) Rappeler les six étapes du plan d'étude d'une telle courbe.

b) Étudier la courbe.

INDICATIONS: pour l'étude des points non biréguliers, on pourra vérifier que le seul zéro du polynôme $-143x^4 + 216x^2$ sur $[-1, 1]$ est $x = 0$.

CORRIGÉ: a) Voir cours. b) Étape 1: la courbe est définie sur \mathbb{R} , mais elle est $\pi/3$ périodique. On l'étudie donc sur un intervalle de longueur $\pi/3$ pour obtenir tout le tracé. De plus, $r(-\theta) = r(\theta)$, donc $c(-\theta)$ est le symétrique de $c(\theta)$ par la symétrie d'axe (Ox) . Il suffit donc d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/6]$, ce qu'on va faire. Mais on aurait pu remarquer que $r(\frac{\pi}{6} - \theta) = r(\theta)$, donc $c(\frac{\pi}{6} - \theta)$ est le symétrique de $c(\theta)$ par rapport à la droite de pente $\theta = \pi/12$. On peut donc étudier la courbe sur $[0, \pi/12]$ puis effectuer la symétrie par rapport à la droite d'angle $\theta = \pi/12$, puis la droite $\theta = 0$, puis effectuer des rotations d'angles $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$ et $5\pi/3$ pour compléter le tracé.

Étape 2: $r'(\theta) = 12 \sin 6\theta \cos 6\theta = 6 \sin(12\theta)$. Donc $r'(\theta) \geq 0$ sur $[0, \pi/12]$ et $r'(\theta) \leq 0$ sur $[\pi/12, \pi/6]$. Donc r est croissante sur $[0, \pi/12]$ de 0 à 1 puis décroissante de 1 à 0. Par ailleurs, il y a deux points singuliers, en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/6$, où $r(\theta) = r'(\theta) = 0$, d'où $c'(\theta) = \vec{0}$.

Étape 3: la courbe passe au pôle en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/6$. Comme $r(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le rayon ne change pas de signe, il s'agit donc de points de rebroussement de première espèce dans les deux cas.

Étape 4: On a $r'(\theta) = 12 \sin 6\theta \cos 6\theta$ et $r''(\theta) = 72 - 144 \sin^2(6\theta)$. Donc la quantité $\det(c'(\theta), c''(\theta)) = r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)$ vaut

$\sin^4(6\theta) + 288 \sin^2(6\theta) (1 - \cos^2(6\theta)) - 72 \sin^2(6\theta) + 144 \sin^4(6\theta) = \sin^2(6\theta)(216 - 143 \sin^2(6\theta))$. Cette quantité ne s'annule qu'en $\theta = 0[\pi/6]$, soit en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/6$. Il n'y a donc pas de point non birégulier en dehors des passages au pôle.

Étape 5: comme r est bornée sur \mathbb{R} , le point $c(\theta)$ ne peut pas partir à distance infinie de l'origine. Il n'y a donc pas de branche infinie.

Étape 6: tracé.

