Corrigé du partiel de Méthodes expérimentales - Mardi 27 mars

Question de TP (1 point) : Quelle instruction MAPLE utiliser pour tracer les fonctions $f : x \to \cos x$ et $g : x \to \sin x$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ sur le même graphique ?

corrigé `> plot([cos(t), sin(t)],t=-2*Pi..2*Pi);`

Exercice 1 (6 points) : Étude complète de la courbe paramétrée par $c : t \in \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t)) = (4\cos t + \cos(2t), \sin(2t))$.

1) Rappeler le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane.

2) Faire l'étude complète de la courbe et la tracer en s'aidant des questions-indications ci-dessous.

a) Montrer que $x'(t) = -4\sin t(1 + \cos t)$.
b) Calculer les valeurs de $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ en $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.
c) Montrer que les seuls zéros de la fonction $\varphi : x \mapsto -16x^3 + 24x + 8$ sur $[-1, 1]$ sont -1 et $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
d) Soit $\frac{\pi}{2} < t_0 < \frac{2\pi}{3}$ l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos t_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \simeq -0,35$. On ADMET que la courbe a un point d'inflexion en $c(t_0)$.
e) Montrer qu'au point $c(\pi)$ les deux premiers entiers caractéristiques valent $p = 1$ et $q = 4$.

Corrigé Pour la question 1, voir cours ou td. Avant de faire la question 2, faisons les questions-indications.

a) On calcule $x'(t) = -2\sin 2t - 4\sin t = -4\sin t\cos t - 4\sin 2t = -4\sin t(1 + \cos t)$.

b) $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$. $x(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, $x'(\frac{\pi}{4}) = -2 - 2\sqrt{2}$ et $y(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$. $x(\frac{\pi}{2}) = -1$, $x'(\frac{\pi}{2}) = -4$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = -2$. $x(\frac{3\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$, $x'(\frac{3\pi}{4}) = 2 - 2\sqrt{2}$ et $y(\frac{3\pi}{4}) = -1$ et $y'(\frac{3\pi}{4}) = 0$. $x(\pi) = -3$ et $x'(\pi) = 0$ et $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 2$.

c) on vérifie que $\varphi(x) = 8(x + 1)(-2x^2 + 2x + 1)$; la fonction polynomiale $x \mapsto -2x^2 + 2x + 1$ a pour zéros $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ et seul $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ appartient à $[-1, 1]$.

e) En $c(\pi)$ on calcule $c'(\pi) = (0, 2) \neq \vec{0}$, donc $p = 1$. Puis $x''(t) = -4\cos 2t - 4\cos t$ et $y''(t) = -4\sin 2t$ d'où $c''(\pi) = (0, 0)$ et $q > 2$. Ensuite, on calcule $x'''(t) = 8\sin 2t + 4\sin t$ et $y'''(t) = -8\cos 2t$ et $c'''(\pi) = (0, -8)$. Ce vecteur est colinéaire à $c'(\pi)$ donc $q > 3$. (Attention, cas très rare!) Pour finir, on calcule $x^{(4)}(t) = 16\cos 2t + 4\cos t$ et $y^{(4)}(t) = 16\sin 2t$ d'où $c^{(4)}(\pi) = (12, 0)$ et $q = 4$. Il s'agit donc d'un point ordinaire, en lequel la courbe est très proche d'une droite.

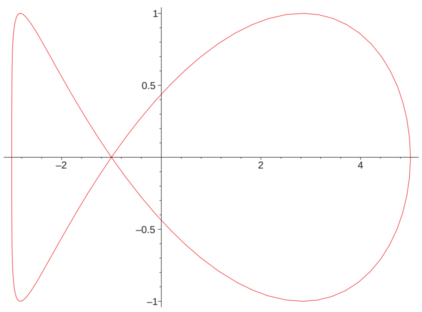
étude de la courbe La courbe est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est 2π-périodique, on peut donc l'étudier sur $[-\pi, \pi]$. La fonction x est paire, et y est impaire. La trajectoire de la courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $(0x)$. On peut donc l'étudier sur $[0, \pi]$ puis effectuer une symétrie pour compléter le graphe.

Le tableau de variations de x et y se remplit très bien à l'aide des questions a et b: $x'(t) = 0$ ssi $t = 0$ ou $t = \pi$ et $y'(t) = 0$ ssi $t = \pi/4$ ou $3\pi/4$. x est décroissante sur $[0, \pi]$ alors que y est croissante sur $[0, \pi/4]$ puis décroissante sur $[\pi/4, 3\pi/4]$ puis croissante sur $[3\pi/4, \pi]$. Il n'y a donc pas de point singulier.

Pour l'étude des points non biréguliers, un calcul donne $x'(t) = -2\sin 2t - 4\sin t$ et $x''(t) = -4\cos 2t - 4\cos t$, $y'(t) = 2\cos 2t$ et $y''(t) = -4\sin 2t$ d'où $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 8 + 8\cos t\cos 2t + 16\sin t\sin 2t$. On utilise les formules trigo classiques: $8\cos t\cos 2t + 8\sin t\sin 2t = 8\cos(2t - t) = 8\cos t$, et $8\sin t\sin 2t = 16(\sin t)^2\cos t = 16 - 16\cos^3 t$. On obtient bien $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -16(\cos t)^3 = 24\cos t + 8 = \varphi(\cos t)$. Les questions-indications nous montrent que cette quantité s'annule ssi $\cos t = -1$ ou $\cos t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, soit encore $t = \pi$ ou $t = t_0 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[$. Ce sont les deux seuls points non biréguliers. D'après les questions précédentes, on sait que $c(\pi)$ est un point ordinaire en lequel la courbe est très aplatie, et $c(t_0)$ est un point d'inflexion.

Il n'y a pas de branche infinie, car x et y sont bornées sur leur domaine de définition.

Pour le tracé, on s'appuie sur l'étude ci-dessus. Après symétrie, la courbe ressemble à un poisson.



Exercice 2 (6 points) : Soit $c : t \in D \mapsto (x(t) = \tan t + \sin t, y(t) = \dfrac{1}{\cos t})$ une courbe paramétrée.

1) Préciser quel est son domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$.
2) Questions préliminaires à l'étude. On pourra admettre les résultats des questions 2a et 2b pour faire la question 3.
a) $*$ Étudier les variations de la fonction $\varphi : x \to -2x^3 + 3x + 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
$*$ Montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = -1$ et $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
$*$ En déduire que la fonction $t \in [0, \pi] \mapsto \varphi(\cos t)$ s'annule en deux points exactement. On appellera t_0 l'unique réel de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que

$\cos t_0 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer que $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1-\sin t}{\cos t} = 0^+$ et $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1-\sin t}{\cos t} = 0^-$.

3) Étudier complètement et tracer cette courbe paramétrée.

Indications et rappels pour l'étude des points non biréguliers :

$*$ Montrer que pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -2(\cos t)^3 + 3\cos t + 1$, et en déduire quels sont les points non biréguliers.

$*$ En un point singulier $c(t)$, on calculera les deux entiers caractéristiques p et q. Rappelons que le premier vecteur dérivé non nul $c^{(p)}(t)$ donne la direction de la tangente à la courbe en $c(t)$.

$*$ On **ADMETTRA** que le point $c(t_0)$ est un point d'inflexion, où $t_0 \in [\frac{\pi}{2},\pi[$ est l'unique réel tel que $\cos t_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et on ne cherchera pas à le placer précisément sur le dessin.

corrigé

1) La fonction tan est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, , k\in\mathbb{Z}\}$, sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, et cos s'annule exactement sur l'ensemble $\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Autrement dit, la courbe est définie exactement sur D.

2a) On a $\varphi'(x) = -6x^2+3$. Donc $\varphi'(x)\le 0$ ssi $x^2 \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc φ décroît sur $[-1,-\sqrt{2}/2]$ de $\varphi(-1)=0$ à $\varphi(-\sqrt{2}/2) = 1-\sqrt{2}$, croît sur $[-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$ jusqu'à $\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1+\sqrt{2}$ Cette fonction ne s'annule que deux fois sur $[-1,1]$, en -1 et sur l'intervalle $[-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$. On remarque que $\varphi(x) = (x+1)(-2x^2+2x+1)$. La fonction polynômiale $x\mapsto -2x^2+2x+1$ s'annule en $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ et seul $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$. Comme $\cos t\in[-1,1]$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\varphi(\cos t)$ s'annule ssi $\cos t = -1$ ou $\cos t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, soit encore $t=\pi$ ou $t = t_0$.

2b) Pour calculer ces limites, on peut par exemple se ramener en 0 en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$. On a donc $\frac{1-\sin t}{\cos t} = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos(\frac{\pi}{2}-u)} = \frac{\cos 0 - \cos u}{\sin u} = \frac{u^2/2+o(u^3)}{u+o(u^2)}$. Cette quantité tend vers 0 quand $u\to 0$ (i.e. $t\to\frac{\pi}{2}$). Par ailleurs, on vérifie que si $t<\frac{\pi}{2}$, $\frac{1-\sin t}{\cos t}\ge 0$ d'où $\frac{1-\sin t}{\cos t}\to 0^+$. De même, si $t\to(\frac{\pi}{2})^+$, $t\ge\frac{\pi}{2}$, $\cos t\le 0$ et donc $\frac{1-\sin t}{\cos t}\to 0^-$.

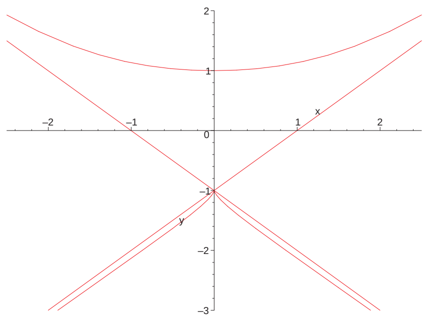
3) On étudie la courbe sur D. La courbe est 2π-périodique, on peut l'étudier sur $[-\pi,\pi]$. De plus, x est impaire et y paire, la trajectoire de la courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $(0y)$. On étudie donc la courbe et on la trace sr l'nsemble $[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$, puis on effectue la symétrie.

On calcule $x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} + \cos t = \frac{\cos^3 t+1}{\cos^2 t}\ge 0$; cette quantité s'annule uniquement lorsque $\cos t = -1$ soit encore $t=\pi$. Donc x est croissante sur $[0,\pi/2[$, de $x(0)=0$ à $\lim_{t\to\pi/2} x(t) = +\infty$. De même, $y'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\ge 0$ pour tout $t\in[0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi]$. Et $y'(t) = 0$ ssi $t=0$ ou $t=\pi$. Donc y croît de 1 à $+\infty$ sur $[0,\pi/2[$ et de $-\infty$ à -1 sur $]\pi/2,\pi]$. On remarque par ailleurs que la courbe a un unique point singulier en $t=\pi$.

Pour étudier les points non biréguliers, on calcule $x''(t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} - \sin t = \sin t\frac{2-\cos^3 t}{\cos^3 t}$ et $y''(t) = \frac{2-\cos^2 t}{\cos^3 t}$. On en déduit $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \frac{(2-\cos^2 t)(1+\cos^3 t)}{\cos^5 t} - \frac{\sin^2 t(2-\cos^3 t)}{\cos^5 t} = \cdots = \frac{\varphi(\cos t)}{\cos^3 t}$. La question 2a nous permet de dire que cette quantité s'annule ssi $\cos t = -1$ ou $\cos t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, soit encore $t=\pi$ (le point singulier repéré ci-dessus) ou $t=t_0$. Le point $c(t_0)$ est un point d'inflexion d'après l'énoncé. En $t=\pi$, on voit que $c'(\pi) = \vec{0}$, $c''(\pi) = (0,-1)$ donc $p=2$ et la tangente à la courbe en $c(\pi)$ est verticale, et $c'''(\pi) = (1,0)$ donc $q=3$. Il s'agit donc d'un point de rebroussement de première espèce.

Vu le tableau de variations de x et y, la courbe a deux branches infinies en $(\pi/2)^{\pm}$. On calcule $\lim_{t\to\pi/2}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pi/2}\frac{1}{\sin t(1+\cos t)} = 1$. Il y a donc une direction asymptotique de pente 1. On calcule ensuite $\lim_{t\to(\pi/2)^\pm} y(t) - 1.x(t) = \lim_{t\to(\pi/2)^\pm}\frac{1-\sin t}{\cos t} - \sin t = -1$. On en déduit que la droite $y = x-1$ est asymptote en $(\pi/2)^{\pm}$. De plus si $t\le\pi/2$ la courbe est au dessus de l'asymptote et si $t\ge\pi/2$ la courbe est au dessous de l'asymptote. En effet, lorsque $t\to(\pi/2)^{\pm}$, $y(t) - (x(t)-1) = \frac{1-\sin t}{\cos t}(\cos t+1)$ est du signe de $\frac{1-\sin t}{\cos t}$, donc positif pour $t\le\pi/2$ et négatif pour $t>\pi/2$.

On trace ensuite la courbe.



Exercice 3 (6 points) Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 8y - 3 = 0$$

a) Quel est le nom de ce type de courbe?

b) Par un changement de repère orthonormé, trouver une équation plus simple pour $\mathcal{C}$. **c)** Tracer cette courbe.

d) Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de la courbe. Quelle est l'équation de la tangente en M_0 à la courbe?

e) Soient $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ deux points distincts de la courbe. À quelle condition sur les coordonnées (x_1,y_1) et (x_2,y_2) les tangentes à $\mathcal{C}$ en M_1 et M_2 sont-elles orthogonales?

f) Donner un exemple de deux tels points.

Corrigé Cette courbe est une conique. La méthode vue en cours donne $x^2-6x+4y^2+8y-3=(x-3)^2+4(y+1)^2-16$. La courbe $\mathcal{C}$ a donc encore pour équation $(x-3)^2+4(y+1)^2=16$. Soit $O'(3,-1)$. Dans le repère $(0',\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe a pour équation $X^2+4Y^2=16$, avec $X=x-3$ et $Y=y+1$. On réécrit l'équation $\dfrac{X^2}{16}+\dfrac{Y^2}{4}=1$. C'est l'équation d'une ellipse. Pour le tracé, voir cours. Elle est comprise entre les cercles $C(0,2)$ et $C(0,4)$, et passe par les points $(0,\pm 2)$ et $(\pm 4,0)$.

La tangente T_0 en M_0 à la courbe a pour équation $\frac{XX_0}{16}+\frac{YY_0}{4}=1$. Les tangentes T_1 et T_2 à $\mathcal{C}$ en M_1 et M_2 sont orthogonales ssi un vecteur normal à T_1 est orthogonal à un vecteur normal à T_2, soit encore $(\frac{X_1}{16},\frac{Y_1}{4})\perp(\frac{X_2}{16},\frac{Y_2}{4})$. Ceci donne comme condition $\frac{X_1X_2}{16}+Y_1Y_2=0$. Par exemple, les points $M_1=(0,2)$ et $M_2(4,0)$ conviennent.