Université Picardie Jules Verne
Licence 1 Semestre 2

Faculté de Mathématiques et Informatique
« Méthodes expérimentales » 2005

Corrigé Examen de Méthodes expérimentales - Deuxième session -6 Septembre 2006 - 16h30-18h30

Question de cours ($\simeq$ 2 points) : 1) Soit $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1. À l'aide de quelle formule calcule-t-on concrètement la longueur de c sur $[a,b]$?

2) Soit $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 paramétrée par abscisse curviligne. Comment définit-on la courbure de c au point $c(t)$, $t \in]a,b[$?

corrigé 1) $L(c_{|[a,b]}) = \displaystyle\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$. 2) $C(t) = \frac{1}{\|c''(t)\|}$.

Exercice 1 ($\simeq$ 7 points) : Le but de l'exercice est l'étude de la courbe paramétrée en polaires par $\theta \in \mathbb{R} \mapsto 3+5\cos 4\theta$.

a) Dans quelle zone du plan se situe-t-elle?

b) Sur quel intervalle I suffit-il d'étudier la courbe ? Pourquoi ?

c) Étudier les variations de r sur I. Donner ses extrema. Quelle est la direction de la tangente en un maximum ou un minimum de r ?

d) En quel(s) point(s) la courbe passe-t-elle par le pôle? Quelle est son allure en ce(s) point(s) ?

Indication : On donne la valeur approchée $\theta_1 = \frac{1}{4}\arccos(-3/5) \simeq 0,18\pi$, et on remarque que $\pi/8 \leq \theta_1 \leq \pi/5$.

e) Quels sont les points non biréguliers en dehors du pôle? Quelle est l'allure de la courbe en ce(s) point(s) ?

Indications :

$*$ Montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto -375x^2 + 270x + 809$ n'a pas de zéro dans $[-1,1]$.

$*$ Conclure l'étude des points non biréguliers.

f) Étudier les branches infinies et spirales de la courbe.

g) Tracer la courbe.

Corrigé a) $r(\theta) \in [-2,8]$. La courbe se situe donc à l'intérieur du cercle $C(0,8)$, et on peut déjà supposer que le cercle $C(0,2)$ doit jouer un rôle dans la figure.

b) r est $\pi/2$-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle de longueur $\pi/2$ puis compléter le tracé par trois rotations d'angles $\pi/2$, π, et $3\pi/2$. Mais r est aussi paire, on peut donc l'étudier sur $[0,\pi/4]$ et on complètera le tracé par une symétrie par rapport à l'axe $(0x)$, puis par les rotations.

c) $r(\theta) = -20\sin 4\theta \leq 0$ sur $[0,\pi/4]$. Donc r décroît de 8 à -2. En un extremum, $r'(\theta) = 0$ donc $c'(\theta) = r(\theta)v_\theta$. La tangente est donc orthogonale au rayon $(0M(\theta))$.

d) La courbe passe par le pôle lorsque $r(\theta) = 0$. Ici, lorsque $\cos(4\theta) = -3/5$; c'est-à-dire en $\theta_1 = \frac{1}{4}\arccos(-3/5)$, $M(\theta_1) = O$. En ce point, r change de signe, de sorte que c'est un point ordinaire.

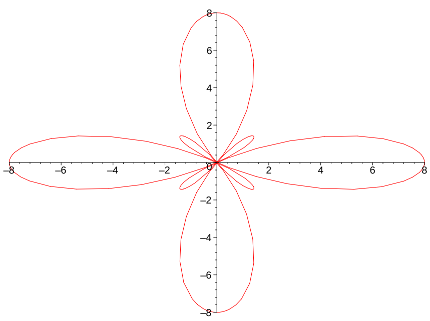
e)Pour trouver les points non biréguliers en dehors du pôle, on cherche les zéros du déterminant $\det(c'(\theta), c''(\theta)) = r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)$. Un calcul donne

$$r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta) = -375\cos^2 4\theta + 270\cos 4\theta + 809$$

La fonction $\varphi : x \mapsto -375x^2 + 270x + 809$ n'a pas de racine sur $[-1,1]$. En effet, ses racines sont $\frac{-270\pm\sqrt{\Delta}}{-750}$ avec $\Delta = 80^2.201$, et on vérifie par un calcul approché qu'elles ne sont pas dans $[-1,1]$. On peut aussi étudier le signe de φ' et les variations de φ pour arriver à la même conclusion. Il n'y a donc pas de point non birégulier.

f) Pas de branches infinies, ni branches spirales car r et θ restent bornés.

g) voir figure



Exercice 2 ($\simeq$ 8.5 points) :

Dans le plan orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on note Δ la droite d'équation $x = 1$ et A le point de coordonnées $(1,1)$.

On fait varier une droite $D(\theta)$ passant par O et d'angle $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ avec l'axe des abscisses. Soit $P(\theta)$ le point d'intersection de la droite $D(\theta)$ avec Δ. La strophoïde de foyer O, de point double A et d'axe Δ est le lieu des points $M(\theta)$ de la droite variable $D(\theta)$ qui se situent *à gauche* de la droite Δ et tels que $P(\theta)M(\theta) = P(\theta)A$.

a) Trouver les coordonnées polaires du point $P(\theta)$, et calculer la distance $AP(\theta)$.

b) Donner un paramétrage en polaires $\theta \mapsto (r(\theta), \theta)$ de la courbe décrite par $M(\theta)$ lorsque θ varie dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

c) Étudier les symétries éventuelles de la courbe.

d) * Montrer que $\theta \mapsto r(\theta)$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, et dérivable sur $]-\pi/2, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.
* Calculer sa dérivée sur $]-\pi/2, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.
* Calculer les limites à gauche et à droite de r' lorsque $\theta \to \frac{\pi}{4}^{\pm}$.

e) En déduire que $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^+} \vec{c'(\theta)} = (-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ (dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$) et $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}^-} \vec{c'(\theta)} = (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, puis le fait que la courbe admet deux demi-tangentes distinctes en $\pi/4$.

f) * Étudier les variations de r.
* En particulier, on montrera (à l'aide d'équivalents quand $\theta \to \pi/2$) que $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} r(\theta) = 1$ et $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}} r(\theta) = -1$.

g) * Calculer les limites de r' aux mêmes bornes.
* En déduire les limites suivantes $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \vec{c'(\theta)} = (-1, -\frac{1}{2}) = \lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}} \vec{c'(\theta)}$.

h) * À l'aide des variations de r montrer qu'il n'y a qu'un seul passage au pôle.
* Étudier l'allure de la courbe en ce point.

i) On ADMETTRA qu'il n'y a pas de point non birégulier sur $]-\pi/2, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.

j) Étudier les éventuelles branches infinies de la courbe.

k) Tracer la courbe.

Corrigé a) $P(\theta) = (\theta, \frac{1}{\cos\theta})$ et $AP(\theta) = |1-\tan\theta|$ par de la trigonométrie élémentaire.

b) On en déduit le paramétrage $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto M(\theta) = (\theta, r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} - |1-\tan\theta|)$.

c) La fonction r n'est ni paire ni impaire, et n'a pas de période sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il n'y a donc a priori pas de symétries.

d)* Commençons par remarquer que si $\theta \in [\pi/4, \pi/2[$, alors $\tan\theta \geq 1$, d'où $r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + 1 - \tan\theta$. De même si $\theta \in]-\pi/2, \pi/4]$, alors $r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta - 1$. Cette fonction est bien sûr continue et dérivable sur chacun des deux intervalles ouverts (somme de fonctions continues, dérivables), et elle est continue en $\pi/4$, égale à $r(\pi/4) = \sqrt{2}$ puisque $\tan\pi/4 = 1$.

* Sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, on calcule $r'(\theta) = \frac{\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$. Donc $r'(\theta) \to \sqrt{2}-2$ quand $\theta \to \frac{\pi}{4}^+$. Si $\theta < \pi/4$, alors $r'(\theta) = \frac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}$, donc $r'(\theta) \to \sqrt{2}+2$ quand $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$. Ces deux limites sont différentes.

e) En un point $c(\theta)$ avec $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ on a $\vec{c'(\theta)} = r'(\theta)u_\theta + r(\theta)v_\theta$. Quand $\theta \to \frac{\pi}{4}^+$, $r'(\theta) \to \sqrt{2}-2$, $u_\theta \to u_{\pi/4} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $r(\theta) \to \sqrt{2}$ et $v_\theta \to (-1/\sqrt{2}, 1/sqrt2)$. On en déduit que $\lim_{\theta\to(\pi/4)^+} \vec{c'(\theta)} = (-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$.

De la même façon, on montre que $\lim_{\theta\to(\pi/4)^-} \vec{c'(\theta)} = (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

Autrement dit, la courbe admet deux demi-tangentes distinctes, l'une dirigée par $(-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ quand $\theta \to \pi/4^+$ et l'autre par $(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ quand $\theta \to \pi/4^-$.

f) Étudions les variations de r sur les intervalles sur lesquels elle est dérivable. Sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $r'(\theta) = \frac{\sin\theta-1}{\cos^2\theta} \leq 0$. Donc r est décroissante. En $\pi/4$, $r(\pi/4) = \sqrt{2}$. Et quand $\theta \to \pi/2$, on a $r(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + 1 - \tan\theta = 1 + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$. Quand $\theta \to \pi/2$, $1-\sin\theta \sim \frac{(\theta-\frac{\pi}{2})^2}{2}$ et $\cos\theta \sim (\frac{\pi}{2}-\theta)$. On en déduit que $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \to 0$ et $r(\theta) \to 1$.

Le même type de calculs donne que sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$, $r'(\theta) = \frac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta} \geq 0$. Donc r est croissante, de -1 (limite en $-\frac{\pi}{2}$) à $\sqrt{2}$.

Et on remarque qu'en coordonnées polaires, les points de coordonnées $(\theta = \pi/2, r = +1)$ et $(\theta = -\pi/2, r = -1)$ sont confondus, égaux au point de coordonnées cartésiennes $(0, 1)$.

g) En $\pi/2$, $\sin\theta - 1 \sim -\frac{(\theta-\frac{\pi}{2})^2}{2}$ et $\cos^2\theta \sim (\theta-\frac{\pi}{2})^2$. On en déduit que $r'(\theta) \to -1/2$ quand $\theta \to \pi/2$. De la même façon, on montre que $\sin\theta + 1 \sim \frac{(\theta+\frac{\pi}{2})^2}{2}$ quand $\theta \to -\pi/2$ et $\cos^2\theta \sim (\theta+\frac{\pi}{2})^2$ donc $r'(\theta) \to 1/2$.

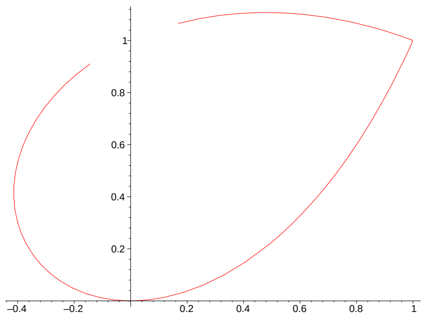
La formule $\vec{c'(\theta)} = r'(\theta)u_\theta + r(\theta)v_\theta$ et le fait que $u_{\pi/2} = \vec{\jmath}$, $v_{\pi/2} = -\vec{\imath}$ permettent d'obtenir $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \vec{c'(\theta)} = (-1, -\frac{1}{2})$. La deuxième limite se calcule de la même façon avec $u_{-\pi/2} = -\vec{\jmath}$ et $v_{-\pi/2} = \vec{\imath}$.

h) Sur $]\pi/4, \pi/2[$, r décroît de $\sqrt{2}$ à 1 et ne peut donc pas s'annuler. Sur $]-\pi/2, \pi/4[$, r croît de -1 à $\sqrt{2}$ et s'annule donc exactement une fois. Pour trouver le passage au pôle on résoud donc $r(\theta) = 0$ avec $\theta < \pi/4$, soit encore $\frac{1}{\cos\theta} - 1 + \tan\theta = 0$, ce qui équivaut à $1 + \sin\theta = \cos\theta$, soit encore $\theta = 0$. En ce point, r change de signe, la courbe a donc une allure normale.

i) Pas de points non biréguliers.

j) La fonction r est continue et a des limites finies en $\pm\pi/2$. Il n'y a donc pas de branche infinie. Il n'y a pas non plus de branche spirale, puisque la courbe est définie sur un intervalle borné, et que r a des limites finies en $\pm\pi/2$.

k) Voir la courbe pour le tracé. On place le point $c(\pi/4)$ et ses deux demi-tangentes, le point $c(0)$ et sa tangente horizontale, le point $c(\pi/2) = c(-\pi/2)$ et sa tangente. Et on trace la courbe.



Exercice 3 ($\simeq$ 5 points) : Étudier la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3 + 5t, 4t^2 - 1)$.

Corrigé Étape 1 Pas de périodes.
La fonction $t \mapsto x(t) = t^3 + 5t$ est impaire, et la fonction $t \mapsto y(t) = 4t^2 - 1$ est paire. La courbe est donc invariante par la symétrie d'axe $(0y)$. Il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie.
Étape 2 $x'(t) = 3t^2 + 5 > 0$ donc x est croissante sur $\mathbb{R}_+$, de 0 à $+\infty$. De même, $y'(t)) = 8t \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc y est croissante de -1 à $+\infty$. Il n'y a pas de point singulier. Faire le tableau de variations simultanées de x et y.

Étape 3 Recherche des points non biréguliers. On calcule $x''(t) = 6t$ et $y''(t) = 8$, puis

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 24t^2 + 40 - 48t^2 = 40 - 24t^2 = 8(5 - 3t^2)$$

Il y a donc un unique point non birégulier, lorsque $t = \sqrt{5/3}$. En ce point la quantité ci-dessus s'annule en changeant de signe, c'est donc un point d'inflexion. Vérifions le en calculant les entiers caractéristiques p et q en ce point. En ce point, $c'(\sqrt{5/3}) = (10, 8\sqrt{5/3})$ donc $p = 1$, $c''(\sqrt{5/3}) = (6\sqrt{5/3}, 8) = \sqrt{\frac{3}{5}}c'(\sqrt{5/3})$ donc $q > 2$ et $c'''(\sqrt{5/3}) = (6, 0)$ n'est pas colinéaire à $c'(\sqrt{5/3})$ donc $q = 3$. La courbe admet un point d'inflexion.

Étape 4 Étude des branches infinies. Quand $t \to +\infty$, il y a une branche infinie puisque $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to \infty$. C'est une branche parabolique d'axe $(0x)$ puisque $\frac{y(t)}{x(t)} \to 0$.

Étape 5 tracé. Voir figures. On place le point $c(0) = (0, -1)$, et sa tangente horizontale dirigée par $c'(0) = (5, 0)$. On place approximativement le point $c(\sqrt{\frac{5}{3}}) \simeq (8.6, 5.7)$, et sa dérivée $c'(\sqrt{5/3}) \simeq (10, 10.3)$. Et on trace la courbe. Sur le premier graphe, le point d'inflexion et la branche parabolique se voient peu, sur le deuxième, on a une image trompeuse de ce qui se passe autour de 0. D'où l'intérêt de faire l'étude soi-même et ne pas se contenter du graphe Maple.