Université Picardie Jules Verne — Faculté de Mathématiques et Informatique

Licence 1 Semestre 2 — « Méthodes expérimentales » 2006

TP2, semaines des 9 et 16 mai 2006

Exercice 1 Si vous ne l'avez pas déjà fait, consultez l'aide de « implicitplot »

```
>?implicitplot;
```

Tracez la famille de courbes d'équation $x^2 + Ay^2 = 1$, pour A variant entre -1 et 1. Quelles courbes reconnaissez-vous?

Exercice 2 Tracez une famille de paraboles d'équation $y^2 = 2Ax$, pour A variant dans un intervalle que vous choisirez.

Exercice 3 Tracez la famille d'hyperboles d'équation $xy = A$, avec A qui varie dans l'intervalle de votre choix.

Exercice 4 Tracer rapidement certaines des courbes suivantes, en faisant éventuellement varier des paramètres pour celles et ceux qui ont le temps.

- Limaçon de Pascal : $t \mapsto (2A\cos^2 t + \cos t, 2A\cos t\sin t + \sin t)$.
- Cissoïde de Dioclès : paramétrage $t \mapsto \left(\frac{2At^2}{1+t^2}, \frac{2At^3}{1+t^2}\right)$
- Strophoïde droite : paramétrage $t \mapsto \left(A\frac{t^2-1}{t^2+1}, At\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$
- Conchoïde de Nicomède :paramétrage $x(\theta) = 1 + A\cos\theta$ et $y(\theta) = \tan\theta + A\sin\theta$.
- Epicycloïdes: $t \in \mathbb{R} \mapsto \left((R+r)\sin t + r\sin(\frac{R+r}{r}t), (R+r)\cos t + r\cos(\frac{R+r}{r}t)\right)$, et surtout les cas particuliers de la cardioïde $(R = r = A)$ $t \in \mathbb{R} \mapsto (2A\sin t + A\sin(2t), 2A\cos t + A\cos(2t))$ et néphroïde $(R = 2r = 2A)$ $t \in \mathbb{R} \mapsto (3A\sin t + A\sin(3t), 3A\cos t + A\cos(3t))$.
- Hypocycloïdes: astroïde $R = 4r = 4A$ paramétrée par $t \mapsto (A(3\cos t + \cos 3t), A(3\sin t - \sin 3t))$ et deltoïde si $R = 3r = 3A$ paramétrée par $t \mapsto (A(2\cos t + \cos 2t), Ae^t\sin t)$
- Spirale logarithmique $t \in \mathbb{R} \mapsto (Ae^t\cos t, Be^t\sin t)$.

Courbes en polaires

Exercice 5 Consultez l'aide sur l'**option** « polar » de la commande « plot » (faites d'abord ?plot puis cherchez les explications sur l'option «oords=polar »). Puis tracez les courbes suivantes, éventuellement avec une animation si vous avez le temps :

- $\rho : \theta \mapsto \cos(n\theta)$, où n est un entier de votre choix.
- $\rho : \theta \mapsto \cos(\frac{p}{q}\theta)$, où $\frac{p}{q}$ est un entier de votre choix.
- $\rho : \theta \mapsto l + 2R\cos\theta$ (conchoïde, et si $l = 2R$ cardioïde),
- $\rho := \theta \mapsto \frac{2R\sin^2\theta}{\cos\theta}$ (cissoïde de Dioclès)
- $\rho := \theta \mapsto -\frac{R\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (strophoïde droite)

Rectification, longueur de courbes

Exercice 6 Consultez l'aide sur « polygonplot », puis, pour quelques valeurs de n, petites et grandes, tracez un polygône à n côtés dont les sommets sont à distance 1 de l'origine. Qu'observez-vous quand n grandit?

Exercice 7 Notre but est maintenant de calculer une approximation de π à l'aide du calcul du demi-périmètre d'un polyône régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.
a) (Cours) Soit P_n le demi-périmètre d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle $C(O,1)$. Pourquoi tend-il vers π?
b) (Sur papier) Montrez que dans un triangle $0AB$ d'angle au sommet 0 égal à $\frac{2\pi}{n}$ et de côtés $0A = 0B = 1$, on a $AB = 2\sin\frac{\pi}{n}$. Déduisez-en que le demi-périmètre P_n d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle $C(O,1)$ vaut

$$P_n = n\sin\frac{\pi}{n}\,.$$

Cette formule peut-elle nous aider à trouver une valeur approchée de π? Pourquoi?
c) (Sur papier) Démontrez la formule suivante. Si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)}\,.$$

d) (Sur papier) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_1 = 2$ et $x_{k+1} = 2^k\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(\frac{x_k}{2^k})^2}\right)}$. Démontrez que $\lim_{k\to+\infty} x_k = \pi$.
e) À l'aide de l'instruction « for », calculez les premières valeurs de x_k.
Remarque En fait, si $(\frac{x_k}{2^k})^2$ devient trop petit, l'ordinateur va approcher $\sqrt{1-(\frac{x_k}{2^k})^2}$ par 0, et il donnera $x_{k+1} = 0$, ce qui n'est pas du tout ce qu'on veut! Pour éviter cela, on va modifier légèrement la suite x_k.
f) (Sur papier) Vérifiez les formules suivantes pour $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}\,,$$

d'où

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-\sin^2\alpha})}}.$$

g) Reprenez la question **e)** en considérant la suite définie par $x_1 = 2$ et $x_{k+1} = \dfrac{2x_k}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-(x_k/2^k)^2})}}$.

graphisme en dimension 3

Exercice 8 On peut demander à Maple de tracer des surfaces paramétrées dans l'espace. Consultez l'aide sur « plot3d ».
Tracez la surface paramétrée par $x(s,t) = \sin s$, $y(s,t) = \cos s\,\sin t$ et $z(s,t) = \sin t$.
Tracez la surface définie en coordonnées cartésiennes par $z = \sin(x+y)$.