Université de Picardie Jules Verne — Année 2004-2005
Licence de Mathématiques S5

Examen d'Intégration 1

le jeudi 6 Janvier 2005, 08h00-10h00 (2 heures), Amphi ????

Attention: *Documents non autorisés. On s'attachera à rédiger de façon claire, précise et concise, et à justifier l'utilisation des résultats du cours. Le barème n'est qu'indicatif.*

LES EXERCICES SONT TOUS INDÉPENDANTS.

Exercice 0. *Questions de cours.*

0.1. (0,5 pts) Donner la définition de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

0.2. (1,5 pts) Enoncer le théorème de convergence dominée, le théorème de Beppo Levi et le lemme de Fatou.

0.3.(1,5 pts) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que pout tout $n \geq 1$ et pour μ-presque tout x on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Montrer que pour μ-presque tout x et pour tout $n \geq 1$ on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

♢ ♢ ♢

Exercice I. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *un nombre. Soit* $\{r_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de points distincts dans l'intervalle* $[0, 1]$*. On considère la fonction* $\Phi : [0, 1] \to [0, +\infty]$ *définie par*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x - r_n|^\alpha} \qquad (\textit{avec convention } \frac{1}{0} = +\infty).$$

I.1.(2 pts) Montrer que pour $r \in [0, 1]$, la fonction $|x-r|^{-\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \frac{1}{|x - r|^\alpha}\, d\lambda(x) \leq C \qquad (\forall r \in [0, 1]).$$

I.2.(1,5 pts) En déduire que

$$\int_0^1 \Phi(x)\, d\lambda(x) < \infty.$$

I.3.(1 pts) En déduire que $\Phi(x) < \infty$ pour λ-presque tout x.

1.4. (1 pt) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\lim_{x\to r_n} \Phi(x) = +\infty$.

1.5. (1 pt) Donner le dessin schématique du graphe de Φ lors que $r_n = n^{-1}$.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

Exercice II. *Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction non-négative et Borel mesurable satisfaisant à la condition*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^t f(t) d\lambda(t) < \infty \tag{C}$$

où $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et λ désigne la mesure de Lebesgue. On étudie la fonction $J_f :]-\infty, 1] \to [0, +\infty]$ définie par l'intégrale de Lebesgue

$$J_f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xt} f(t) d\lambda(t) \qquad (x \in]-\infty, 1]).$$

II.1. Montrer les faits suivants:

(i) (1,5 pts) La fonction J_f est à valeurs finies et continue sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

(ii) (1 pt) Pour tout nombre donné $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ dépendante de δ telle que

$$t + t^2 \leq C_\delta e^{\delta t} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

(iii) (0,5 pt) Si $C_\delta > 0$ est la constante si-dessus, on a l'inégalité

$$(t + t^2) e^{xt} \leq C_\delta \, e^t \quad (\forall x \in]-\infty, 1-\delta], \forall t \in \mathbb{R}_+).$$

(iv) (2 pt) La fonction J_f est deux fois dérivable dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, et $J_f'(x) \geq 0$ et $J_f''(x) \geq 0$ pour tout $x < 1$.

II.2. Considérons dans la suite le cas particulier où

$$f(t) = h(t) = \frac{e^{-t}}{1 + t^2}.$$

Montrer les faits suivants:

(v) (0,5 pt) La fonction h vérifie la condition (C).

(vi) (1 pt) On a

$$\lim_{x \uparrow 1} J_h'(x) = +\infty.$$

(vii) (2 pts) La fonction J_h satisfait à l'équation différentielle

$$J_h''(x) + J_h(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

(viii) (2 pts) On a

$$\lim_{x \uparrow 1} J_h''(x) = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow 1} (1 - x) J_h''(x) = 1.$$