Université de Picardie Jules Verne **Année 2010-2011**
Master 1 de Mathématiques

M3-Probabilités
TD N. 3 Indépendance

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$, et $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$. Étudier le lien entre l'indépendance des (A_i) et l'indépendance des X_i.

Corrigé Si les (X_i) sont indépendantes, alors pour tout $J \subset I$ fini, et toute famille (B_i) de boréliens, on a $\Pi_{i\in J} P(X_i \in B_i) = P(\forall i \in J,\ X_i \in B_i)$. En particulier, si $B_i = \{1\}$, on obtient $\Pi_{i\in J} P(A_i) = P(\cap_{i\in J} A_i)$, d'où l'indépendance des (A_i).

Réciproquement, supposons que les A_i sont indépendants, et les B_i sont des boréliens. Si B_i contient 0 et 1, alors $\{X_i \in B_i\} = \Omega$. Supposons donc que pour tout $i \in J$, B_i contient soit 0 soit 1 (le cas où il n'en contient aucun est trivial). Quitte à changer A_i en A_i^c, on peut supposer que pour tout i, B_i contient 1 mais pas 0. Alors on a $\Pi_{i\in J} P(X_i \in B_i) = \Pi_{i\in J} P(A_i) = P(\cap_{i\in J} A_i) = P(\forall i \in J,\ X_i \in B_i)$. D'où l'équivalence.

Exercice 2. Le lemme de Borel Cantelli est-il vrai pour une suite de v.a. deux à deux indépendantes ?

1. Montrer que la seule question est de savoir si pour une suite de v.a. deux à deux indépendantes, la divergence de la série $\sum_n P(A_n) = +\infty$ implique $P(\limsup A_n) = 1$ ou non.

2. Soit $S_n = \sum_1^n \mathbf{1}_{A_k}$. Quel est le comportement de $E(S_n)$ quand $n \to +\infty$?

3. Montrer que $\frac{S_n}{E(S_n)}$ tend vers 1 dans L^2.

4. En déduire l'existence d'une sous-suite $n_k \to +\infty$, tq $\frac{S_{n_k}}{E(S_{n_k})} \to 1$ presque sûrement.

5. Conclure.

Corrigé 1. En effet, si $\sum_n P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$, alors par contraposée, $P(\limsup A_n) \neq 1$ implique $\sum P(A_n) < \infty$ ce qui implique ensuite (partie facile de Borel Cantelli) $P(\limsup A_n) = 0$.

2. On a $E(S_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \to +\infty$ quand $n \to \infty$ puisque la série est supposée divergente.

3. Un calcul donne

$$\begin{aligned} E\left(\left(\frac{S_n}{n} - 1\right)^2\right) &= \frac{1}{(E(S_n))^2} E((S_n - E(S_n))^2) = \frac{Var(S_n)}{E(S_n)^2} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^n Var(1_{A_k})}{(\sum_{k=0}^n P(A_k))^2} = \frac{\sum_{k=0}^n P(A_k)(1 - P(A_k))}{(\sum_{k=0}^n P(A_k))^2} \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^n P(A_k)} \to 0 \end{aligned}$$

On a à peine utilisé l'indépendance deux à deux, et en fait simplement le fait que les (X_n) sont 2 à deux non corrélées, ce qui est bien plus faible.

4. C'est un lemme vu en probas L3. Si $(f_n) \to f$ dans L^2, il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge ps vers f. En effet, comme $\|f_n - f\|_2 \to 0$, on construit par récurrence une suite f_{n_k} tq $\|f_{n_k} - f\|_2 \leq \frac{1}{2^k}$. La série $\sum |f_{n_k} - f|$ est donc absolument convergente dans L^2. L'inégalité de Minkowski assure que $\| \sum_1^N (f_{n_k} - f)\|_2 \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_k} - f\|_2$. En passant à la limite, on en déduit que $\left(\sum_{k=1}^\infty |f_{n_k} - f|\right)^2$ est intégrable, et donc finie ps. Donc $\sum_{k=1}^\infty (f_{n_k} - f)$ converge ps. Donc $f_{n_k} - f \to 0$ ps quand $k \to \infty$. D'où le résultat.

5. On a montré qu'il existe une sous suite $n_k \to +\infty$ tq ps $\frac{S_{n_k}}{E(S_{n_k})} \to 1$. Pour $\omega \in \Omega$ tq cette convergence a lieu, comme $E(S_n) \to +\infty$, on a $S_{n_k}(\omega) \to +\infty$, ce qui signifie exactement que $\omega \in \limsup A_n$. Donc $P(\limsup A_n) = 1$.

Exercice 3. La loi du 0-1 de Kolmogorov est-elle vraie pour des suites de v.a. deux à deux indépendantes ? On pourra considérer la suite de v.a. suivantes. Soit $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et ε des v.a. qui valent ± 1 avec probabilité 1/2, indépendantes dans leur ensemble. On pose ensuite $X_{2n+1} = \varepsilon * X_{2n}$.

1. Montrer que les (X_n) sont deux à deux indépendantes, mais pas dans leur ensemble.

2. Montrer que la loi du 0-1 est fausse dans le cas de variables 2 à deux indépendantes seulement.

Corrigé Les (X_n) sont deux à deux indépendantes, mais pas dans leur ensemble. En effet, $P(X_0 = 1, \varepsilon = -1, X_1 = 1) = 0 \neq P(X_0 = 1) \times P(\varepsilon = -1) \times P(X_1 = 1) = \frac{1}{8}$. L'indépendance deux à deux est claire par hypothèse.

2. L'événement $\varepsilon = 1$ est dans la tribu asymptotique $\mathcal{F}^\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\cup_{k\geq n} \sigma(X_k))$, car $\{\varepsilon = 1\} = \{X_{2n} = X_{2n+1}\} \in \sigma(\cup_{k\geq 2n} \sigma(X_k))$. Or il est de probabilité 1/2, ce qui contredit la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

Exercice 4. Soit (A_n) une suite d'événements indépendants sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $P(\liminf A_n) \in \{0, 1\}$ et $P(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$.

2. Donner dans chacun des cas une condition nécessaire et suffisante permettant de décider entre 0 et 1.

3. A-t-on $P(\liminf A_n) = P(\limsup A_n)$?

Corrigé : 1. Comme les (A_n) sont indépendants, le lemme de Borel-Cantelli permet d'affirmer que $P(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$ et $P(\liminf A_n) = 1 - P(\limsup A_n^c) \in \{0, 1\}$.

2. $P(\limsup A_n) = 0$ ssi $\sum_n P(A_n) < \infty$. De même, $P(\liminf A_n) = 0$ ssi $\sum P(A_n^c) = +\infty$.

3. Non en général. Par exemple, sur $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, on prend $A_{2n} = [0, 1/2[$ et $A_{2n+1} = [1/2, 1]$. Alors $P(\liminf A_n) = 0 \neq P(\limsup A_n) = 1$.

Exercice 5. **1.** Soit X une var telle que $P(X \in A) \in \{0,1\}$ pour tout borélien A. Montrer que X est constante p-s.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes définies un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ diverge p-s ou converge p-s.

Corrigé : 1. Considérons les ensembles $A_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $P(X \in A_n^k) \in \{0,1\}$. De plus, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $P(X \in A_0^{k_0}) = 1$ car les $(A_0^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une partition dénombrable de $\mathbb{R}$, d'où $\sum_k P(A_0^k) = 1$.

Posons $B_0 = \overline{A_0^{k_0}}$. Ensuite, on recommence. Les $A_1^k \subset A_0^{k_0}$ forment une partition de $A_0^{k_0}$, donc l'un d'eux vérifie $P(X \in A_1^{k_1}) = 1$. On pose $B_1 = \overline{A_1^{k_1}}$. Par récurrence, on construit une suite décroissante d'intervalles fermés emboités B_n de longueur 2^{-n}, qui vérifient tous $P(X \in B_n) = 1$. A la limite, $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{c\}$, et $P(X = c) = 1$. Autrement dit, presque sûrement, X est constante égale à c.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes. D'après Borel-Cantelli, $P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \{0,1\}$, et $P(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \{0,1\}$. D'après la question précédente, il existe deux constantes c_1, c_2, telles que $P(\limsup A_n = c_1) = 1$ et $P(\liminf A_n = c_2) = 1$. Si $c_1 = c_2$, alors (X_n) converge p.s. vers c_1. Si $c_1 > c_2$, alors (X_n) diverge p.s.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Montrer que $\liminf Y_n$ et $\limsup Y_n$ sont constantes p-s.

2. En déduire que $P\left(Y_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$.

3. Montrer que $P\left(S_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$.

4. Peut-on dire que $\liminf S_n$ est constante p-s ?

Corrigé : 1. On va montrer que $\liminf Y_n$ est $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, soit encore que $\liminf Y_n$ est $\mathcal{F}^N$ mesurable pour tout $N \geq 0$, avec $\mathcal{F}^N = \sigma(\cup_{k\geq N}\sigma(X_k))$.

Fixons N. Alors on peut écrire

$$\liminf Y_n = \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} X_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{+\infty} X_k\right) = \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{+\infty} X_k\,.$$

Le premier terme dans la parenthèse tend vers 0, et le deuxième est $\mathcal{F}^N$-mesurable. Donc $\liminf Y_n$ est $\mathcal{F}^N$-mesurable comme limite inf de fonctions $\mathcal{F}^N$-mesurables.

Dire que $\liminf Y_n$ est $\mathcal{F}^\infty$-mesurable, ça signifie exactement que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{\liminf Y_n \in A\}$ est dans $\mathcal{F}_\infty$. On en déduit alors, par la loi du $0-1$ de Kolmogorov, que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(\liminf Y_n \in A) \in \{0,1\}$. L'exercice 4 précédent permet de conclure que $\liminf Y_n$ est constante p.s.

Le même raisonnement s'applique bien sûr pour $\limsup Y_n$.

2. Si $\liminf Y_n = c_1$ ps et $\limsup Y_n = c_2$ ps, alors $c_1 = c_2$ implique Y_n converge ps et $c_1 < c_2$ implique Y_n diverge ps.

3. Montrons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\{\omega \in \Omega,\, S_n(\omega) \text{ converge }\}$ est dans $\mathcal{F}^N$. La suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $U_n^N(\omega) = \sum_{k=N}^n X_k(\omega)$ converge quand $n \to +\infty$. Donc l'événement $\{\omega \in \Omega,\, S_n(\omega) \text{ converge }\}$ est dans $\mathcal{F}^N$ pour tout N fixé, donc dans $\mathcal{F}^\infty$. Le même raisonnement que ci-dessus permet de conclure que $P\left(S_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$.

4. Non. Prendre X_1 tq $P(X_1 = \pm 1) = 1/2$, et $X_n = 0$ pour $n \geq 2$. Alors $\liminf S_n = X_1$ qui n'est pas constante ps. (Lorsque la limite inf et la limsup d'une suite de v.a. sont égales à une même constante, alors la suite converge vers cette constante. Mais bien sûr, une suite de v.a. peut converger ps vers une v.a. non constante, auquel cas les liminf et limsup seront egales mais pas constantes!)

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ et $p \neq 0,5$. On considère la marche aléatoire $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec $Y_0 = 0$.

L'événement $A_n = \{Y_n = 0\}$ est dit *retour en 0*. Montrer que $P(\limsup A_n) = 0$.

Corrigé On vérifie que $P(Y_{2n+1} = 0) = 0$ car il faut un nombre pair d'étapes pour revenir en 0.

De plus, un calcul montre que

$$P(Y_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}p^n(1-p)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(4p(1-p)\right)^n$$

L'équivalent est obtenu à l'aide de la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$. Comme $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$, on a $4p(1-p) < 1$. L'équivalent obtenu est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum_n P(Y_{2n} = 0) < \infty$. Donc $P(\limsup\{Y_{2n} = 0\}) = 0$.

Exercice 8 (Loi des grands nombres pour les var L^2). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes de même loi, de carré intégrables et de moyenne μ. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer sans utiliser la loi forte des grands nombres pour les var L^1 que

1. $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers μ.

2. $\frac{S_n}{n}$ converge dans L^2 vers μ.

3. $\frac{S_n}{n}$ converge ps vers μ.

Corrigé On peut supposer que $\mu = 0$, en considérant $\tilde{X}_n = X_n - \mu$.

1. Observons que
$$P(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} E(\frac{S_n^2}{n^2}) = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0\,.$$

2. $E\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$. Donc $\frac{S_n}{n} \to 0$ dans L^2.

3. On a $P(|S_n/n| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{n}$. En remplaçant n par n^2 et en prenant $\varepsilon = n^{-1/4}$, on obtient $P(|S_{n^2}/n^2| > n^{-1/4}) \le \frac{\sigma^2}{n^{3/2}}$. Donc $\sum_n P(|S_{n^2}/n^2| > n^{-1/4}) < \infty$. Donc $P(\limsup\{|S_{n^2}/n^2| > \frac{1}{n^{1/4}}\}) = 0$. Ceci implique que ps $|S_{n^2}(\omega)/n^2| \le n^{-1/4}$ pour n assez grand, et donc que S_{n^2}/n^2 converge ps vers 0.

On décompose maintenant $X_n = X_n^+ - X_n^-$ de sorte à pouvoir supposer $X_n \ge 0$.

Maintenant pour $m \in \mathbb{N}$ quelconque, on écrit $n^2 \le m < (n+1)^2$, pour $n = E(\sqrt{m})$. On a alors
$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{S_{n^2}^+}{n^2} \le \frac{n^2}{m}\frac{S_{n^2}^+}{n^2} \le \frac{(S_m)^+}{m} \le \frac{(n+1)^2}{m}\frac{(S_{m+1}^+)^2}{(m+1)^2} \le \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{(S_{m+1}^+)^2}{m^2}$$
Ceci implique que S_m^+/m a même limite que $S_{n^2}^+/n^2$, puis de même pour S_m^-/m. Le résultat en découle.

Exercice 9 (Condition nécessaire pour la loi des grands nombres)**.** Soient $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de var indépendantes de même loi.

1. Montrer que $\lim_n \frac{X_n}{n} = 0$ p-s si et seulement si $X_1 \in L^1$.

2. On définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En déduire que si les variables X_n ne sont pas intégrables, la suite $(\frac{S_n}{n})$ ne converge pas.

Corrigé 1. Supposons que $E(|X_1|) < \infty$. Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Alors
$$\sum_{n\ge1} P(|X_n| \ge cn) = \sum_{n\ge1} P(\frac{|X_1|}{c} \ge n) = \sum_{n\ge1} E\left(\mathbf{1}_{|X_1|/c\ge n}\right) = E(\sum_{n\ge1}\mathbf{1}_{|X_1|/c\ge n})\,.$$
La premiere égalité vient du fait que les X_n ont même loi, la derniere de Beppo-Levi pour les séries a termes positifs. Ensuite, on utilise la formule classique : si Z est une variable aléatoire a valeurs entieres, alors $E(Z) = sum_{k\ge0}P(Z \ge k)$ (se montre par Fubini-Tonelli). Ici on obtient (en notant [.] la partie entiere)
$$E(\sum_{n\ge1}\mathbf{1}_{|X_1|/c\ge n}) = E([\frac{|X_1|}{c}]) \le E(\frac{|X_1|}{c}) < \infty\,.$$
On utilise alors Borel Cantelli, qui donne $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \ge cn\}) = 0$ pour tout $c > 0$. Autrement dit, presque surement, $\{\frac{|X_n|}{n} \ge c\}$ n'est réalisé qu'un nombre fini de fois, pour tout $c > 0$. Prenons $c = \frac{1}{k}$. L'ensemble des ω tels que pour tout $k \ge 1$, $\frac{|X_n|(\omega)}{n} \le c$ à partir d'un certain rang est un ensemble de probabilité 1. Autrement dit ps, $\frac{X_n}{n} \to 0$.

Réciproquement, supposons par l'absurde que $X_1 \notin L^1$. Alors
$$\sum_{n\ge1} P(|X_n| \ge n) = E([|X_1|]) \ge E(|X|) - 1 = +\infty$$
Donc presque surement, $\frac{|X_n|}{n} \ge 1$ est réalisé infiniment souvent. Donc $P(\frac{X_n}{n} \to 0) = 0$.

2. Considérons $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Alors $Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{n+1}X_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n X_k = \frac{X_{n+1}}{n+1} - \frac{Y_n}{n+1}$. Ainsi, si $Y_n = \frac{S_n}{n}$ converge, alors $\frac{X_n}{n} \to 0$ ps. D'après la question précédente, si les X_i ne sont pas intégrables, alors X_n/n ne tend pas vers 0 donc Y_n ne converge pas.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de var indépendantes de même loi de carré intégrables. Etudier la convergence presque-sûre de la suite $(Z_n)_{n\ge1}$ définie par
$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

Corrigé Par la loi des grands nombres L^2, $Z_n \to \frac{E(X_1)}{E(X_1^2)}$.

Exercice 11. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(U_n)_{n\ge1}$ une suite de va indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(U_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Corrigé Les $f(U_n)$ sont indépendantes et bornées, donc L^2, donc la loi des grands nombres donne le résultat.

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de var indépendantes de même loi de carré intégrables. On pose $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Pour $n \ge 2$, on définit les var :
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - Y_n)^2.$$

1. Calculer $E[Z_n]$.

2. Montrer que $\lim_n Z_n = \sigma^2$ p.s.

Corrigé : 1. Un calcul donne

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}E(X_1^2) + \frac{n}{n-1}E(Y_n^2) - \frac{2n}{n-1}E(X_1 Y_n)$$

On calcule $E(Y_n^2) = \cdots = \frac{1}{n}E(X_1^2) + \frac{n-1}{n}E(X_1)^2$ et $E(X_1Y_n) = \frac{1}{n}E(X_1^2) + \frac{n-1}{n}E(X_1)^2$. On obtient finalement, vu que $E(X_1^2) = \sigma^2 + m^2$ et $E(X_1)^2 = m^2$, $E(Z_n) = \sigma^2$.

2. On remarque que Z_n s'écrit

$$Z_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{n-1}Y_n^2 .$$

Les X_i sont dans L^2, et donc les X_i^2 dans L^1. Donc la loi des grands nombres s'applique, et donne $Y_n \to E(X_1)$ ps donc $Y_n^2 \to (E(X_1))^2$. De même $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 \to E(X_1^2)$ par la LGN. Finalement, la formule ci-dessus montre que $Z_n \to E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \sigma^2$.

Exercice 13. On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Etudier $\sum_n \lambda(A_n)$ et calculer $\lambda(\limsup_n A_n)$ où $A_n = [0, 1/n]$. Que peut-on en déduire ?

Corrigé La somme $\sum_n \lambda(A_n)$ diverge. De plus, $\limsup A_n = \{0\}$, d'où $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Donc Borel Cantelli ne s'applique pas, les A_n ne sont pas deux à deux indépendants.

Exercice 14. On jette indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée . Quelle est la probabilité de faire une infinité de fois deux piles consécutifs ? Etudier également le cas où la pièce n'est pas équilibrée.

Corrigé On se place sur $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, muni de la mesure $\mu = \{1/2, 1/2\}^{\otimes\mathbb{N}}$. On vérifie que c'est bien une mesure de probabilité sur Ω muni de la tribu engendrée par les cylindres. On appelle A_n l'événement "obtenir pile aux temps $2n$ et $2n+1$. Alors, $\mu(A_{2n}) = 1/4$. Les (A_n) sont clairement 2 à deux indépendants. Et on a $\sum_n \mu(A_n) = +\infty$. Par Borel Cantelli, on obtient $\mu(\limsup A_n) = 1$, donc on obtiendra infiniment souvent deux piles de suites avec le premier à un temps pair, donc une infinitï¿½ de fois deux piles de suite.

Exercice 15. On suppose qu'un singe placé devant une machine à écrire tape chaque lettre avec la même probabilité et de manière indépendante. Montrer que tôt ou tard il finira par ecrire n'importe quel poème de Verlaine. Le résultat reste-il vrai si l'on suppose que les lettres ne sont pas toutes tapées avec la même probabilité ?

Corrigé Ici, $\Omega = \{a, b, \ldots, z\}^{\mathbb{N}}$. C'est le même exercice que le précédent. Si p désigne la longueur du poème de Verlaine, on note A_n l'événement "le poème de Verlaine apparait intégralement en partant de la lettre pn, et on raisonne comme ci-dessus.

Exercice 16. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ et $(A_n)_{n\geq 0}$ les événements $E_n = \{X_n \geq \alpha \ln n\}$ où $\alpha > 0$. Calculer $P(\limsup A_n)$.

Corrigé Un calcul donne $P(X_n \geq \alpha \ln n) = \int_{\alpha \ln n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{n^{\lambda\alpha}}$. Autrement dit, si $\lambda\alpha \leq 1$, $\sum P(E_n) = +\infty$, d'où $P(\limsup E_n) = 1$, et si $\lambda\alpha \geq 1$, $P(\limsup E_n) = 0$.

Exercice 17. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes. Montrer que

$$\sup_n X_n < \infty \text{ p.s} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A > 0, \quad \sum_n P(X_n > A) < \infty.$$

Corrigé Si $\sum_n P(X_n > A) < \infty$, alors $P(\limsup\{X_n > A\}) = 0$, donc il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tq pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_n(\omega) \leq A$ pour n assez grand ($n \geq N(\omega)$). Autrement dit, $\sup_n X_n(\omega) = \max\{X_1(\omega), \ldots, X_{N_\omega}(\omega), A\} < \infty$.

Si pour tout $A \geq 0$, $\sum_n P(X_n > A) = +\infty$, alors pour tout $A > 0$, $P(\limsup\{X_n \geq A\}) = 1$. Considérons $A_k = k \to +\infty$, et $E_k = \limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq k\}$. Alors pour tout $k \geq 0$, $P(E_k) = 1$, donc $P(\cap_k E_k) = 1$, donc presque surement en $\omega \in \Omega$, pour tout $k \geq 0$, $\limsup X_n(\omega) \geq k$, ce qui montre bien que $\sup_n X_n(\omega) = +\infty$.

Exercice 18. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que la mesure de l'ensemble $n\mathbb{Z}$ des entiers divisibles par n vaut $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé Soit $A_p = p\mathbb{Z}$, pour p premier. Par définition de A_p et de $P(A_n) = 1/n$, les A_p, p premier, sont deux a deux indépendants. Si une telle proba existe, par Borel Cantelli, on aurait $P(\limsup_p(p\mathbb{Z})) = 1$, ce qui impliquerait que $\limsup_p p\mathbb{Z} \neq \emptyset$, et donc qu'il existerait un entier divisible par une infinité de nombres premiers, ce qui est absurde.