Feuille d'exercice 4- Compléments

Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques

Exercice 1 **a)** Soient α et $\beta \in \mathbb{C}$ des racines primitives n-ièmes de l'unité.
a) Montrez que $\alpha\beta$ est une racine primitive 35-ième de l'unité.
b) montrez que les polynômes cyclotomiques Φ_5, Φ_7 et Φ_{35} sont les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ respectivement de α, β et $\alpha\beta$.
c) Quels sont les degrés sur $\mathbb{Q}$ des extensions $\mathbb{Q}[\alpha]$, $\mathbb{Q}[\beta]$ et $\mathbb{Q}[\alpha\beta]$?
d) Soit $K = \mathbb{Q}[\alpha] \cap \mathbb{Q}[\beta]$. Que peut-on dire a priori de $[K : \mathbb{Q}]$?
e) Montrez qu'il existe r et $s \in \mathbb{Z}$ tels que $(\alpha\beta)^r = \beta$ et $(\alpha\beta)^s = \beta$. **f)**Comparez $\mathbb{Q}[\alpha, \beta])$ et $\mathbb{Q}([\alpha\beta])$, puis calculez $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$. **g)** Calculez $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)]$. **g)** Montrez que $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq [\mathbb{Q}(\beta) : K]$. **h)** Montrez que $[\mathbb{Q}(\beta) : K] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$. Conclusion?

Corps finis

Exercice 2 Soit $P(X) = X^7 + X + 1$ un polynôme dans $\mathbb{F}_2[X]$ et α une racine de P dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_2$. Montrez que $[\mathbb{F}_2(\alpha) : \mathbb{F}_2] = \min\{i \in \mathbb{N}\, ,\, \alpha^{2^i} = \alpha\}$. Déduisez-en que $[\mathbb{F}_2(\alpha) : \mathbb{F}_2] = 7$ et que P est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.