Feuille 9 - Espaces $\mathcal{L}^p$, $p \geq 1$

Exercice 1 (Examen de Juin 2002) Soit f une fonction borélienne dans $\mathcal{L}^2([0,1])$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \|f\|_2$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| dx < \infty$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x) dx = \int_0^1 f(x) \log \frac{1}{1-x} dx$.

Exercice 2 On pose $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$. Soit $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^p$, et $g \in \mathcal{L}^q$, alors $fg \in \mathcal{L}^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 3 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Montrer que pour $1 \leq p < q < \infty$ on a $\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \subset \mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu) \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Exercice 4 Soit $l^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On note $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de l^p, vu comme application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la norme l^p est finie.

1. Constater que $x \in l^p$ signifie $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$.
2. Pour $1 \leq p < q < \infty$, montrer que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$.

Exercice 5 Montrer que sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a $\mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2 \neq \emptyset$, $\mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1 \neq \emptyset$.

Exercice 6 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et $p \geq 1$. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction $x \mapsto \dfrac{x^a}{1 + x^b}$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + |\log x|)^2}$, $1 \leq p \leq \infty$.
Est-ce que $f \in \mathcal{L}^p([0, 1])$? $\mathcal{L}^p([1, \infty[)$? $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$?

Exercice 8 Montrer que sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ est dense dans $\mathcal{L}^1$ et dans $\mathcal{L}^2$.

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ on pose $f_h(x) = f(x - h)$. Montrer que $||f_h - f||_p \to 0$ quand $h \to 0$. (*Indication : on pourra d'abord considérer le cas où f est continue à support compact*).

Exercice 10 1. Soit $f \in \mathcal{L}^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt \right) = 0.$

Que se passe-t-il si $f \in \mathcal{L}^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, pour $p > 1$?

2. Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Montrer que $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x g(t)dt \right) = 0$.

   Que se passe-t-il si $g \in \mathcal{L}^p([0,1])$ $(p > 1)$?

Exercice 11 Soit (X, T, μ) un espace mesuré tel que μ soit σ-finie. Soit $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ avec $1 \leq p < q < +\infty$.

1. Montrer que pour tout $r \in [p, q]$ on a $|f|^r \leq |f|^p + |f|^q$.
2. Montrer que la fonction $N : r \mapsto ||f||_r$ est continue sur $[p, q]$.

Exercice 12 On travaille sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{L}^p([0,1])$ pour tout $p \geq 1$ mais telle que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$.