

**Feuille d'exercices 8. Changement de variables, passage en polaires**

**Exercice 1** Montrer que  $\int_{[-1,0]} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{[0,1]} \frac{x}{1+x^2} dx$  en utilisant le théorème du changement de variable pour l'intégrale de Riemann (méthode L1-L2) et celui vu en cours cette année pour l'intégrale de Lebesgue. Comparer.

**Exercice 2** Déterminer les limites, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , de

$$(a) n \int_0^\infty \frac{f(nx)}{1+x^n} d\lambda(x); \quad (b) \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} d\lambda(x)$$

où  $f$  est une fonction  $\lambda$ -intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . (On fera le changement de variable  $x = t/n$  en (a) et  $x = t/\sqrt{n}$  dans le cas (b)).

**Exercice 3 1)** Vérifier que les applications suivantes sont des  $C^1$ -difféomorphismes, calculer leurs Jacobiennes et Jacobiens, puis établir les formules du changement de coordonnées :

- Passage en coordonnées polaires :

$$\Phi : (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y = 0\}.$$

- et passage en coordonnées sphériques :

$$\Psi : (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y = 0\}.$$

2) Retrouver l'aire d'un disque de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$  et d'une boule de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4 (Volume d'un tore de révolution)** . Soient  $a, b, c$  trois réels strictement positifs et tels que  $a < c$ . On cherche à calculer le volume du *tore plein*  $T$  obtenu en faisant tourner l'ellipse d'équation :  $\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x = 0$  autour de l'axe  $Oz$ .

1) Vérifier que l'application  $\Phi$  définie par

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto ((c + ar \cos \theta) \cos \varphi, (c + ar \cos \theta) \sin \varphi, rb \sin \theta). \end{aligned}$$

est de classe  $C^1$  et à valeurs dans le tore. Calculer sa jacobienne et son jacobien.

2) Vérifier que la restriction de  $\Phi$  à  $U = ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur son image  $\Phi(U) \subset T$ .

3) Calculer le volume de  $\Phi(U) \subset T$ .

4) Expliciter l'ensemble  $T \setminus \Phi(U)$ . Vérifier (ou admettre) que le volume du tore est celui de  $\Phi(U)$ .

**Exercice 5 (examen de Juin 2002)** Nous proposons d'étudier la fonction  $G: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} dx \quad (t > 0)$$

1) Montrer que la fonction  $G$  est bien définie et dérivable sur  $]0, \infty[$  sans la calculer explicitement.

2) Montrer que  $G$  vérifie l'équation différentielle suivante  $2tG'(t) + G(t) = 0$ . (On pourra intégrer  $G'(t)$  par parties). En déduire que  $G(t) = G(1)/\sqrt{t}$ .

3) Montrer que

$$\left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 6 1)** Soit  $I_n = ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ . Montrer que  $[0, 1] \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$  est négligeable pour la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Calculer pour  $y \geq 0$  la série suivante  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(y+n)^2 + (y+n)}$ .

3) Soit  $T: ]0, 1[ \mapsto [0, 1[$  définie par  $T(x) = 1/x - E(1/x)$ . Montrer que pour tout  $f \in L^1([0, 1], \lambda)$  on a

$$\int_0^1 \frac{f(T(x))}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx.$$

(Effectuer des changements de variable sur chaque ensemble  $I_n$ .)

**Exercice 7 1)** Soit  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Soient  $a = (0, 0)$ ,  $b = (\frac{1}{2}, 0)$ ,  $c = (1, 0)$ ,  $d = (1, 1)$ ,  $e = (\frac{1}{2}, 1)$  et  $f = (0, 1)$  des points de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $A, B, C$  et  $D$  les triangles ouverts de sommets respectifs  $(a, b, f)$  pour  $A$ ,  $(b, c, f)$  pour  $B$ ,  $(c, e, f)$  pour  $C$  et  $(c, d, e)$  pour  $D$ . Dessiner les triangles  $A, B, C, D$  et leurs images  $MA, MB, MC, MD$ . Soit  $\Delta = MA \cup (MB - (1, 0)) \cup (MC - (1, 1)) \cup (MD - (2, 1))$ . Montrer que  $\Delta \subset [0, 1]^2$  et que la mesure de Lebesgue  $\lambda_2$  de  $\Delta$  vaut 1.

**2)** Montrer que si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $[0, 1]^2$  et  $\mathbb{Z}^2$ -périodique, ie: pour tout  $n \in \mathbb{Z}^2$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+n) = f(x)$  alors

$$\int_{[0,1]^2} f(Mx) d\lambda_2(x) = \int_{[0,1]^2} f(x) d\lambda_2(x).$$

(Effectuer des changements de variable sur  $A, B, C$  et  $D$ .)

**Exercice 8** But: calculer  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$

**1)** Montrer que  $t \rightarrow \frac{\ln(t)}{1-t}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  pour la mesure de Lebesgue.

**2)**  $D = ]0, 1]^2$ ,  $\lambda_2$  la mesure de Lebesgue sur  $D$ .

Justifier que  $J = \int_D \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x, y) = \sum_{n \geq 0} \int_D x^n y^n d\lambda_2(x, y)$

**3)**  $\forall s, t > 0, \phi(s, t) = (s, \frac{t}{s})$

Determiner  $\Delta = \phi^{-1}(D)$ . Le tracer.

Montrer que  $\phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\Delta$  sur  $D$ . Montrer que  $J\phi = \frac{1}{s}$ .

**4)** Faire le changement de variable  $\phi(s, t) = (x, y)$  dans  $J$ .

**5)** Conclure.

**Exercice 9** Calculer  $\int_0^1 \int_0^1 \cos((x+y)^2) dx dy$ .