Feuille d'exercices 8. Changement de variables, passage en polaires

Exercice 1 Montrer que $\int_{[-1,0]} \frac{x}{1+x^2}dx = \int_{[0,1]} \frac{x}{1+x^2}dx$ en utilisant le théorème du changement de variable pour l'intégrale de Riemann (méthode L1-L2) et celui vu en cours cette année pour l'intégrale de Lebesgue. Comparer.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Comparer les intégrales $\int_a^b f \circ \varphi(x) \times \varphi'(x)dx$ et $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy$. Commenter.

Exercice 3 Déterminer les limites, lorsque $n \to +\infty$, de

$$\text{(a) } n \int_0^\infty \frac{f(nx)}{1+x^n} d\lambda(x); \qquad \text{(b) } \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} d\lambda(x)$$

où f est une fonction λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$. (On fera le changement de variable $x = t/n$ en (a) et $x = t/\sqrt{n}$ dans le cas (b)).

Exercice 4 **1)** Vérifier que les applications suivantes sont des C^1-difféomorphismes, calculer leurs Jacobiennes et Jacobiens, puis établir les formules du changement de coordonnées :

- Passage en coordonnées polaires :

$$\Phi : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y = 0\}.$$

- et passage en coordonnées sphériques :

$$\Psi : (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq$$

2) Retrouver l'aire d'un disque de rayon r dans $\mathbb{R}^2$ et d'une boule de rayon r dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Volume d'un tore de révolution) . On cherche à calculer le volume du *tore plein* T obtenu en faisant tourner le cercle d'équation : $(y-3)^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$ autour de l'axe Oz.
1) Vérifier que l'application $\Phi : [0,1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$(r,\ \varphi,\ \theta) \qquad \mapsto \ \big((3 + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (3 + r\cos\theta\ )\sin\varphi,\ r\sin\theta\big).$$

est de classe C^1 et à valeurs dans le tore. Calculer sa jacobienne et son jacobien.
2) Vérifier que la restriction de Φ à $U =]0,1[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ est un C^1-difféomorphisme de U sur son image $\Phi(U) \subset T$.
3) Calculer le volume de $\Phi(U) \subset T$.
4) Expliciter l'ensemble $T \setminus \Phi(U)$. Vérifier (ou admettre) que le volume du tore est celui de $\Phi(U)$.

Exercice 6 (examen de Juin 2002) Nous proposons d'étudier la fonction $G\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2}dx \quad (t > 0)$

1) Montrer que G est bien définie et dérivable sur $]0,\infty[$ sans la calculer explicitement.

2) Montrer que G vérifie l'équation différentielle suivante $2tG'(t) + G(t) = 0$. (*On pourra intégrer* $G'(t)$ *par parties*). En déduire que $G(t) = G(1)/\sqrt{t}$.

3) Montrer que

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7 **1)** Soit $I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Montrer que $[0,1] \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer pour $y \geq 0$ la série suivante $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(y+n)^2 + (y+n)}$.

3) Soit $T\colon]0,1[\mapsto [0,1[$ définie par $T(x) = 1/x - E(1/x)$. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1], \lambda)$ on a

$$\int_0^1 \frac{f(T(x))}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx.$$

(Effectuer des changements de variable sur chaque ensemble I_n.)

Exercice 8 **1)** Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $a = (0,0)$, $b = (\frac{1}{2}, 0)$, $c = (1,0)$, $d = (1,1)$, $e = (\frac{1}{2}, 1)$ et $f = (0,1)$ des points de $\mathbb{R}^2$. Soient A, B, C et D les triangles ouverts de sommets respectifs (a,b,f) pour A, (b,c,f) pour B, (c,e,f) pour C et (c,d,e) pour D. Dessiner les triangles A, B, C, D et leurs images MA, MB, MC, MD. Soit $\Delta = MA \cup (MB - (1,0)) \cup (MC - (1,1)) \cup (MD - (2,1))$. Montrer que $\Delta \subset [0,1]^2$ et que la mesure de Lebesgue λ_2 de Δ vaut 1.

2) Montrer que si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[0,1]^2$ et $\mathbb{Z}^2$-périodique, ie: pour tout $n \in \mathbb{Z}^2$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(x+n) = f(x)$ alors

$$\int_{[0,1]^2} f(Mx) d\lambda_2(x) = \int_{[0,1]^2} f(x) d\lambda_2(x).$$

(Effectuer des changements de variable sur A, B, C et D.)

Exercice 9 But: calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$

1) Montrer que $t \to \frac{\ln(t)}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ pour la mesure de Lebesgue.

2) $D =]0,1[^2$, λ_2 la mesure de Lebesgue sur D.

Justifier que $J = \displaystyle\int_D \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x,y) = \sum_{n\geq 0} \int_D x^n y^n d\lambda_2(x,y)$

3) Définissons pour $\forall s, t > 0$ l'application ϕ par $\phi(s,t) = (s, \dfrac{t}{s})$

Déterminer $\Delta = \phi^{-1}(D)$. Le tracer.

Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de Δ sur D. Montrer que $J\phi(s,t) = \frac{1}{s}$ pour tout $(s,t) \in \Delta$.

4)Faire le changement de variable $\phi(s,t) = (x,y)$ dans J.

5) Conclure.

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \cos((x+y)^2) dxdy$.