Université de Picardie Jules Verne — 2009-2010

UFR Sciences — Licence S5 Intégration

Feuille d'exercices 7 - Mesures produit, théorèmes de Fubini

Dans tout ce qui suit, nous appellerons mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ la mesure produit $\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 1) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union au plus dénombrable de pavés à extrémités rationnelles.
2) Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les pavés ouverts et bornés, et donc

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

3) Montrer que la projection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une application borélienne.

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Soient μ et ν deux mesures finies, définies sur $\mathcal{T}$ et ayant même masse totale.
Montrer que $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = \nu(A)\}$ est une classe monotone.

Exercice 3 Montrer que si μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ invariante par translation, et telle que $\mu([0,1]) = 1$, alors $\mu([a,b]) = b - a$ et $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Exercice 4 Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x^2+y^2)(1+z^2) \leq 1\}$.
1) Montrer que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.
2) Calculer $\mu(B)$ pour $\mu = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \delta_0$, $\delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \lambda$, $\delta_0 \otimes \lambda \otimes \lambda$, $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$.

Exercice 5 Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$f_1 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{lcl}]0,1[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^y \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\sin(xy)}{xy} \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{lcl}]0,+\infty[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{(1+x+y)^\alpha} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{lcl}]0,1[^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{x+y^2+z^3} \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{lcl}]0,1[^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{1-xyz} \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{lcl}]0,1[^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{yz}{x} \end{array}$$

Exercice 6 1) Montrer que $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable sur $[0,1] \times [0,+\infty[$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2}{y}\mathrm{e}^{-y}dy$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et} \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que l'on a

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx.$$

b) Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0,1] \times [0,1]$.

c) f est-elle intégrable sur $[-1,1] \times [-1,1]$?

Exercice 8 Montrer en utilisant le Théorème de Tonelli que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions positives mesurables sur $(X,\mathcal{T},\mu)$, où μ est une mesure σ-finie, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_X f_n d\mu\right)=\int_X\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)d\mu.$$

Application. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)e^{-n|x|}}{n^3+x^2}.$$

1) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9 Soient a, b et L trois réels tels que $0 < a < b$ et $L > 0$. Etudier l'intégrabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\sin(xy)\mathbf{1}_{[0,L]\times[a,b]}(x,y),$$

puis montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\text{x} = \ln(\frac{a}{b}).$$

Exercice 10 1) Etudier la continuité, la dérivabilité et le comportement à l 'infini de la fonction F définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

2) Vérifier que F a la même dérivée que la fonction G définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$G(x)=-\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt\right)^2,$$

et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt$.

Pour tout réel $t>0$ et tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ posons $||x||^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$ et

$$f_t(x)=t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{||x||^2}{t}}.$$

3) Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)dx$.

4) Remarquer que $\lim_{t\to+\infty} f_t(x)=0$ et en déduire qu'il n'existe pas de fonction g intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $|f_t(x)|\le g(x)$ pour tout (t,x) de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

Exercice 11 Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E\to\mathbb{R}^+$ mesurable.

1) Montrer que $F : E\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ définie par $F(x,y)=(f(x),y)$ est mesurable pour les tribus produits.

2) En déduire que les ensembles $G=\{(x,y); y=f(x)\}$ et $\Gamma=\{(x,y); 0\le y<f(x)\}$ sont dans la tribu produit $\mathcal{T}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

3) Soient μ une mesure σ-finie sur $(E,\mathcal{T})$ et λ la mesure de Lebesgue de $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$. Montrer que

$$\int_E f d\mu=\mu\otimes\lambda(\Gamma)=\int_{\mathbb{R}^+}\mu(\{f>y\})d\lambda(y).$$