

**Feuille d'exercices 5. Semaine du 15 Novembre 2004 Mesure de Lebesgue**

**Exercice 1** Comment définit-on la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ ?

**Exercice 2** Que vaut la mesure  $\lambda(\{x\})$  d'un singleton  $\{x\}$  de  $\mathbb{R}^n$ ?

**Exercice 3** Que peut-on dire de la mesure  $\lambda(O)$  d'un ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ ?

**Exercice 4** Que vaut la mesure  $\lambda([0, 1]^k)$  où  $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^n$  est un pavé de dimension  $0 < k < n$ ? En déduire la mesure  $\lambda(\mathbb{R}^k)$ , avec  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  un  $k$ -plan ( $k < n$ ).

**Exercice 5** Montrer que la mesure  $\lambda(I)$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est égale à sa longueur. (*Commencer par les intervalles de longueur entière, puis de longueur inverse d'un entier non nul, puis de longueur rationnelle et enfin quelconque.*)

De la même manière, montrer que la mesure  $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_n)$  d'un pavé de  $\mathbb{R}^n$  (les  $I_k$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ ) est égale à son volume.

**Exercice 6** Soit  $C$  le Cantor de  $[0, 1]$  défini par  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ , où  $C_0 = [0, 1]$  et  $C_{n+1}$  est construit en retirant à chaque intervalle de  $C_n$  le tiers du milieu. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le nombre d'intervalles composant  $C_n$  et leur longueur. En déduire  $\lambda(C_n)$  puis  $\lambda(C)$ . Commenter

**Exercice 7** En modifiant la construction précédente, construire pour  $0 \leq \varepsilon < 1$  fixé un Cantor  $C'$  tel que  $\lambda(C') = \varepsilon$ .

**Exercice 8** Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Construire un ouvert non borné de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue au plus  $\varepsilon$  et qui soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9** Soit  $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et  $r > 0$ . On note  $rE = \{r.x, x \in E\}$ . On veut montrer que  $\lambda(rE) = r^n \lambda(E)$ . Montrer cette relation lorsque  $E$  est un pavé, puis un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , puis un borélien de  $\mathbb{R}^n$ , puis un ensemble quelconque de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 10** On se place dans  $\mathbb{R}$  muni de la tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si  $a \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda(\{a\}) = 0$ .
2. Si  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  alors  $\lambda(U) > 0$ .
3. Si  $A$  est une partie mesurable telle que  $\lambda(A) > 0$  alors il existe un ouvert non vide contenu dans  $A$ .
4. Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}$  alors  $K$  est mesurable et  $\lambda(K) < \infty$ .
5. Si  $A$  est une partie mesurable telle que  $\lambda(A) < \infty$  alors il existe un compact  $K$  tel que  $A \subset K$ .
6. Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  telle que  $A \subset B$ , où  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
7. Il existe un ensemble compact non dénombrable contenu dans  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exercice 11** Soit  $R$  la relation d'équivalence définie par :

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. On admet qu'il existe  $A \subset [0, 1]$  tel que tout  $x \in \mathbb{R}$  soit équivalent à un unique point de  $A$  (ceci nécessite d'utiliser l'axiome du choix).
2. Montrer que si  $u, v \in \mathbb{Q}$ ,  $u \neq v$ , alors  $(A + u) \cap (A + v) = \emptyset$ .
3. Supposons  $A$  mesurable, préciser la mesure de Lebesgue de

$$B = \cup_{u \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + u)$$

en fonction de la mesure de  $A$ .

4. Vérifier que  $[0, 1] \subset B \subset [-1, 2]$  et en déduire que  $A$  n'est pas Lebesgue mesurable.