Feuille d'exercices 5. **Intégration, Convergence monotone (Beppo-Levi), Convergence dominée (Lebesgue)**

Intégration

Exercice 1 **a)** Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale.
b) Même question avec $f : x \mapsto x^2$.
c) Même question avec $f = \mathbf{1}_{[0,1/4]} - 3.\mathbf{1}_{]2/3,11/12]}$.

Exercice 2 **a)** Soit δ_0 la mesure de Dirac en $0 \in \mathbb{R}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \arctan(x)\, d\delta_0(x)$.
b) Soit f une fonction mesurable positive, calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f\, d\delta_0$.

Exercice 3 Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, i.e. la mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie pour toute partie A de $\mathbb{N}$ par $\mu(A) = \#A$. Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu$ quand $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(n) = \frac{1}{3^{n+2}}$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ la tribu des ensembles Lebesgue-mesurables, et λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ et $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(A) = \int_A f d\lambda$.
a) Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et que μ est finie si et seulement si f est λ-intégrable.
b) Calculer $\int_{\mathbb{R}} \cos x\, d\mu$ lorsque $f : x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$.

Exercice 5 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Dans la suite "μ-p.p." signifie "μ-presque partout".
a) Supposons $0 \leq f \leq 1$ et $\int_X f d\mu = 1$. Montrer que $f = 1$ μ-p.p..
b) Supposons $0 \leq |f| \leq 1$ et $\int_X f d\mu = 1$. Montrer que $f = 1$ μ-p.p..

Exercice 6 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n : x \mapsto f_n(x) = n^2 x \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x) + (2n - n^2 x)\mathbf{1}_{]1/n,2/n]}(x)$. Montrer que les f_n sont mesurables et calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$, $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$, $\int \limsup\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

Exercice 7 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive.
a) Encadrer l'intégrale de f sur l'ensemble $\{x \in X,\ 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\}$.
b) Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \mu(\{x; 2^n \leq f < 2^{n+1}\}) < +\infty$.

Exercice 8 Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction positive définie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Supposons f μ-intégrable. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $E_n = \{x \in X :\ f(x) \geq n\}$ et $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$.
a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x) = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f(x) d\mu(x) < +\infty$.
b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mu(E_n) = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose qu'elles convergent en mesure vers 0, à savoir: pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mu(\{x \in X; |g_n(x)| > \epsilon\}) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Montrer que $\int_X f \circ g_n d\mu \to f(0)$ quand $n \to +\infty$.

Théorèmes de convergence

Exercice 10 1) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} |f| d\lambda$ existe et est finie.
2) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} \int_{[0,x]} |f| d\lambda$ existe et est finie.

Exercice 11 Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que f_1 soit μ-intégrable. Montrer que (f_n) converge simplement, que sa limite, notée f, est intégrable, et que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu$.

Exercice 12 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k + e^{-n})(k + 1)} = 1$.

Exercice 13 λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déterminer

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(n+x)^n} d\lambda(x)$ et
2. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1-\frac{x}{n^2}\right)^n x^p d\lambda(x),\ p\geq 1.$

Exercice 14 Soit $X=[1,+\infty]$. **a)** Montrer que la fonction $f: x\in X\mapsto f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ est bien définie.
b) Montrer que f est λ-intégrable et calculer $\int_X f d\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Exercice 15 **1)** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha: x\mapsto x^\alpha$ est mesurable sur $[1,+\infty[$.
2) Soit K un compact de $[1,+\infty[$. Montrer que f_α est Lebesgue-intégrable sur K.
3) Montrer que f_α est Lebesgue-intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha<-1$.
4) Montrer que la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto x^\alpha$ restreinte à $[0,1]$ (et prenant une valeur quelconque en 0) est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\alpha>-1$.
En résumé: $x\mapsto|x|^\alpha$ *est intégrable à l'infini ssi* $\alpha<-1$ *et est intégrable à l'origine ssi* $\alpha>-1$. *Pour déterminer si une fonction est intégrable ou pas, il est souvent utile de la comparer aux fonctions puissances.*
3) Mêmes questions avec $x\mapsto|x-r|^\alpha$, où $r\in\mathbb{R}$ est un réel fixé. (On discutera suivant les valeurs de r et de α.)

Exercice 16 **1)** Soit $a>0$. Montrer que $x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[a,+\infty[$.
2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $f_n(x)=\frac{\sin(x)}{x^{1+1/n}}1_{[1,+\infty[}(x)$. Montrer que les fonctions f_n sont Lebesgue-intégrables et convergent uniformément, mais que la limite n'est pas intégrable.
3) Soit $g_n: x\mapsto g_n(x)=n^{-1}1_{[0,n]}(x)$. Montrer que les fonctions g_n sont intégrables et convergent uniformément vers une fonction intégrable, mais

$$\lim_{n\to+\infty}\int g_n d\lambda\neq\int\lim_{n\to+\infty} g_n d\lambda. \qquad \text{Commenter.}$$

Exercice 17 Etudier la limite lorsque $n\to+\infty$, de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)e^{-x^2}d\lambda(x)$ dans les cas suivants:

$$\textbf{a)}\ f_n=\frac{1}{n}1_{[n,+\infty[},\qquad \textbf{b)}\ g_n=n1_{[1/n,2/n]}\qquad \textbf{c)}\ h_n=\frac{1}{n}1_{[0,n]},\qquad \textbf{d)}\ k_n=(-1)^n n1_{[n,n+1]}.$$

Exercice 18 Déterminer les limites de $u_n=\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{n}{nk^2+k+1}$, $v_n=\displaystyle\sum_{1\leq k\leq 2n}\frac{n^2}{kn^2+k^2}$, $w_n=\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{1}{(k+e^{-n})(k+1)}$.

Exercice 19 Si p et q sont deux réels positifs, montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]}\frac{x^{p-1}}{1+x^q}d\lambda(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. En déduire une expression de $\ln(2)$.

Exercice 20 Soit $f_n(x)=e^{-nx}-2e^{-2nx}$, pour $n>0$ et $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout $x>0$ et calculer la somme $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$.
2. Montrer que les f_n et f sont intégrables sur $[0,\infty[$.
3. Calculer et comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\right)$.
4. Expliquer.

Exercice 21 Soit $a>0$. **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty|e^{-nx}\sin ax|dx<\infty$.
b) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin ax}{e^x-1}dx=\sum_1^\infty\frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 22 À l'aide des théorèmes de convergence du cours, calculer les limites des intégrales suivantes (λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$):

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[1,+\infty]}\frac{1}{nx}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}d\lambda(x)$, (noter que $u\in\mathbb{R}_+\mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$)
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)d\lambda(x)$