Université de Picardie Jules Verne — 2004-2005
Faculté de Mathématiques et Informatique — Licence S5 Intégration

Feuille d'exercices 4. Semaines des 25 octobre et 2 novembre 2004
Fonctions mesurables et mesures

Exercices supplémentaires sur les fonctions mesurables

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles boréliennes?

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n 1_{[n,n+1[}(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercice 2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de (X, τ) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $x \in X$, définissons

$$k(x) = \inf\{p \in \mathbb{N} \,:\, f_p(x) > \alpha\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = 0$). Montrer que k est mesurable.

Exercice 3 Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la *troncature* f_n de f de niveau n par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad f(x) > n \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si} \quad f(x) < -n. \end{cases}$$

Faire un dessin, puis montrer que f_n est mesurable et que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Mesures

Exercice 4 Soit X un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$ (la famille des parties de X). Pour toute partie A de X posons $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que μ définit une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercice 5 Soient $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{T}$ une tribu sur X. Soit $\mathcal{S}$ la famille des parties A de Y telles $f^{-1}(A)$ appartient à $\mathcal{T}$.
(a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu,
(b) Montrer que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$-mesurable,
(c) Montrer que

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \bar{\mathbb{R}} \\ A & \mapsto & \mu(f^{-1}(A)). \end{array}$$

définit une mesure sur $(Y, \mathcal{S})$, appelée *mesure image de* μ *par* f et notée $f_*\mu$.
(d) Déterminer la mesure image $\nu = f_*\mu$ dans le cas où $\mu = \delta_a$ est la mesure de Dirac au point $a \in X$.
(e) Montrer que pour toute fonction $g : Y \to \bar{\mathbb{R}}_+$, mesurable positive

$$\int_Y g\, d\nu = \int_X g \circ f d\mu\,.$$

Exercice 6 Soient μ une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles mesurables. Comparer $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. Montrer qu'il y a égalité lorsque $\mu(X)$ est fini.

Exercice 7 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.

1. Montrer que $\underline{\lim}\, A_n$ et $\overline{\lim}\, A_n$ appartiennent à $\mathcal{T}$.

2. Montrer que $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$.

3. Montrer que si $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ est finie alors $\overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n)$.

4. En déduire que si $\lim_{n\to+\infty} A_n$ existe (i.e $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$) alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to+\infty} A_n)$.

Exercice 8 Soient E un espace métrique et μ une mesure mesure finie définie sur $\mathcal{B}$ (l'ensemble des boréliens de E). On appelle $\mathcal{C}$ la classe des $C \in \mathcal{C}$ tels que : pour $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que

$$F \subset C \subset O, \quad \mu(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire et contient les fermés.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par les intersections finies.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.

4. En déduire que μ est *régulière*, c'est-à-dire que pour tout $C \in \mathcal{B}$,

$$\mu(C) = \sup\{\mu(F); F \text{ fermé et } F \subset C\} = \inf\{\mu(O); O \text{ ouvert et } C \subset O\}.$$

Exercice 9 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Montrer que m est σ-finie si et seulement si il existe une partition dénombrable de E en parties mesurables de mesure finie.

Exercice 10 Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} m(|f_n - f| > \varepsilon) < \infty$, alors f_n tend m-presque-partout vers f quand $n \to \infty$. (*Indication: on pourra s'inspirer du lemme de Borel Cantelli, démontré dans le devoir 2.*)

Exercice 11 Soient $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On pose, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) = \displaystyle\int_A f\, dm$.
(a) Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$, notée $\mu = f.m$.
(b) Soit $g : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que $g.\mu = (gf).m$.