

### Feuille d'exercices 11 - Séries de Fourier et Transformation de Fourier

**Exercice 1.** 1) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x$  pour  $x \in [-\pi, \pi[$ .

Calculer les coefficients de Fourier de  $f$  et en déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

2) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x^2$  pour  $x \in [-\pi, \pi[$ .

Calculer les coefficients de Fourier de  $f$  et en déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice 2.** Montrer que convergence au sens classique entraîne convergence au sens de Césaro.

**Exercice 3.** Inégalité de Wirtinger

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  telle que  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser l'égalité.

**Exercice 4.** Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique telle que pour chaque  $n$ , on ait  $\|S_n(f)\|_\infty \leq 1$ . Montrer que  $\|f\|_\infty \leq 1$ .

**Exercice 5.** Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1)  $1_{[a,b]}$

2)  $x \rightarrow e^{-x^2/2}$  (loi gaussienne ou loi normale)

3)  $x \rightarrow e^{-ax} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$  (loi exponentielle)

4)  $x \rightarrow f(ax)$  où  $f$  est intégrable et  $a \neq 0$  (fonction de dilatation).

**Exercice 6.** 1) Etudier le lien entre parité et transformée de Fourier

2) Calculer les transformées de Fourier sur  $\mathbb{R}$  des fonctions  $x \rightarrow e^{-|x|}$ ,  $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$  et

$x \rightarrow \frac{x}{(1+x^2)^2}$ .

**Exercice 7.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \hat{f}(x) d\lambda_n(x).$$