Feuille d'exercices 11 - Séries de Fourier et Transformation de Fourier

Exercice 1 1)Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
2)Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 Montrer que convergence au sens classique entraîne convergence au sens de Césaro.

Exercice 3 (Inégalité de Wirtinger) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt\,,$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 4 Soit f une fonction continue 2π-périodique telle que pour chaque n, on ait $||S_n(f)||_\infty \leq 1$. Montrer que $||f||_\infty \leq 1$.

Exercice 5 Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :
1)$1_{[a,b]}$ 2)$x \to e^{-x^2/2}$ (loi gaussienne ou loi normale)
3)$x \to e^{-ax} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$ (loi exponentielle)
4)$x \to f(ax)$ où f est intégrable et $a \neq 0$ (fonction de dilatation).

Exercice 6 1)Etudier le lien entre parité et transformée de Fourier
2)Calculer les transformées de Fourier sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \to e^{-|x|}$, $x \to \frac{1}{1+x^2}$ et $x \to \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 7 Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\hat{f}(x)d\lambda_n(x).$$