

Feuille d'exercices 10 - Convolution

Dans ce qui suit, $C_0(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue; } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$.

Exercice 1 Soient f et g deux fonctions λ -intégrables sur \mathbb{R} .

1) Montrer que $N_1(f * g) \leq N_1(f)N_1(g)$.

2) Étudier la parité de $f * g$ en fonction des parités de f et g .

Exercice 2 Soit $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Montrer que $f * f$ est continue puis calculer explicitement $f * f$. Même question pour $f * f * f$.

Exercice 3 Soient a et b dans $]0, +\infty[$. Considérons les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f_a(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$ et $g_a(x) = e^{-a|x|}$.

1) Montrer que $f_a * f_b \in C_0(\mathbb{R})$ puis calculer explicitement $f_a * f_b$.

2) Montrer que $g_a * g_b \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(\mathbb{R})$ puis calculer explicitement $g_a * g_b$.

Exercice 4 Soit $a > 0$. Considérons les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f_a(x) = \frac{1}{x - ia} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

1) Montrer que $f_a \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2) Montrer que $f_a * f_b \in C_0(\mathbb{R})$ pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$.

3) Déterminer explicitement $f_a * f_b$.

4) Montrer que $g_a * g_b \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(\mathbb{R})$.

5) En utilisant le calcul de $f_a * f_b$ montrer que $g_a * g_b = g_{a+b}$.

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} , de classe C^1 , bornées, et dont les dérivées sont bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2 .

Exercice 6 Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ où $p \in [1, +\infty[$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{[x, x+1]} f(y) d\lambda(y).$$

1) Montrer que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Trouver g telle que $F = f * g$.

3) Montrer que si $p > 1$ alors $F \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

4) Montrer que si $p = 1$ alors $F \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{q \in [1, +\infty[} L^q(\mathbb{R})$.

Exercice 7 Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f * u = u * f = f$ λ_n -presque partout pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nous noterons $B(r)$ la boule euclidienne de rayon r .

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{B(2\delta)} |u| d\lambda_n < 1$.

2) Montrer que $\mathbf{1}_{B(\delta)}(t) = \int_{B(\delta)+t} u d\lambda_n$ pour λ_n -presque tout $t \in \mathbb{R}^n$.

3) Obtenir une contradiction et conclure qu'un tel u n'existe pas.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la masse de Dirac en a .

1) Montrer que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

2) Pour $m \geq 1$ un entier, et $p \in [0, 1]$, on considère la mesure

$$B(m, p) = \sum_{k=0}^m C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \delta_k.$$

Montrer que $B(m, p) = B(1, p) * B(1, p) * \dots * B(1, p)$.