

**Feuille d'exercices 1. Semaine du 20 septembre 2004**  
**Intégrale de Riemann, opérations ensemblistes, limites inf et sup**

*Certains exercices sont des exercices d'entraînement à faire chez soi (ceci sera précisé en TD).*

**Intégrale de Riemann**

**Exercice 1** On sait que  $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ . Retrouver la valeur de cette intégrale à l'aide de sommes de Riemann.

**Exercice 2** Dans chacun des cas suivants, montrer que  $(S_n)$  converge vers  $I$ , puis calculer  $I$ .

(a)  $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  et  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ .

(b)  $S_n = \frac{1}{n^2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + n \cos\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$  et  $I = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x \cos x dx$ .

**Exercice 3** Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \dots 2n}$ .

**Exercice 4** Si  $A \subset \mathbb{R}$ , on note  $\mathbf{1}_A$  la *fonction caractéristique* de  $A$ , i.e. la fonction valant 1 sur  $A$  et 0 ailleurs. Si  $n \geq 0$ , on définit la fonction  $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ , où  $A_n = \{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, p \leq q, p+q \leq n\}$ .

a) Montrer que  $f_n$  est Riemann-intégrable, calculer  $\int_0^1 f_n(x) dx$  puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

b) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Montrer (en utilisant la définition) que cette fonction n'est pas Riemann-intégrable. Commenter.

**Exercice 5** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies sur  $]0, 1]$  par  $f_n(x) = n \cdot \mathbf{1}_{]0, \frac{1}{n}[}$ . Comparer  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 6** Montrer que  $S_n$  est une somme de Riemann relativement à une fonction  $f$  que l'on précisera, puis déterminer la limite de  $(S_n)$ .

(a)  $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$  (b)  $S_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$

**Exercice 7** Si  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sqrt{1} + \dots + \sqrt{n}$ . Montrer que  $S_n \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}$ .

**Exercice 8** Soit  $f_n(x) = x^n$ . Calculer  $\int_0^1 f_n(x) dx$ , puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement, mais pas uniformément vers la fonction définie par  $f(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}$ . Calculer  $\int_0^1 f(x) dx$ . Commenter.

**Exercice 9 (a)** Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  converge et que  $\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2$  (on pourra faire une intégration par parties).

(b) Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions sur  $[1, +\infty[$  définies par  $f_n(x) = \frac{\sin x}{x}$  si  $x \in [1, n]$  et  $f_n(x) = \frac{n}{x^2} (10 - \int_1^n \frac{\sin x}{x} dx)$  sinon. Comparer  $\int_1^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ .

**Opérations ensemblistes**

**Exercice 10** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ . Donner une relation entre les fonctions  $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_{A \cup B}$ , et  $\mathbf{1}_{A \cap B}$ .

**Exercice 11** Soit  $E$  un ensemble,  $f : E \rightarrow E$  une application, et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On définit  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ , et  $f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}$ .

(a) Comparer  $f(A \cap B)$  avec  $f(A) \cap f(B)$ , et  $f(A \cup B)$  avec  $f(A) \cup f(B)$ . (Si vous trouvez qu'il y a une inclusion, donnez un exemple où cette inclusion peut être stricte.)

(b) Même question avec  $f^{-1}(A \cap B)$  et  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ,  $f^{-1}(A \cup B)$  et  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

(c) Mêmes questions en considérant cette fois une infinité d'ensembles  $(A_i)_{i \in I}$  où  $I$  est un ensemble quelconque.

## Bornes inférieure et supérieure d'un ensemble

**Exercice 12** Trouver les bornes supérieure et inférieure (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) des parties suivantes:

$$\begin{aligned}A &= \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 3^{-n}(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\} \\B &= \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) - 3^{-n}(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\} \\C &= \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 3^n(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\} \\D &= \{2^{n+1}(1 + (-1)^n) + 3^n(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\}\end{aligned}$$

**Exercice 13** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$ .

(a) Montrer que  $A \cap B$  est borné, mais pas forcément non vide.

(b) Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , montrer que  $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$ .

Donner un exemple dans lequel les inégalités sont strictes.

(c) Montrer que  $A \cup B$  est non vide et borné, et que  $\inf A \cup B = \min(\inf A, \inf B)$  et  $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$ .

**Exercice 14** Soit  $A$  une partie majorée de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments distincts, et  $x \in A$ . Montrer que si  $x < \sup A$ , alors  $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$  et si  $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$  alors  $x = \sup A$ .

**Exercice 15** Soit  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit  $\lambda A := \{\lambda x, x \in A\}$ . Comparer  $\sup \lambda A$  et  $\lambda \sup A$ . Mêmes questions avec  $\inf A$  et  $\inf \lambda A$ . (On pourra discuter suivant la valeur de  $\lambda$ .)

## Limites inférieure et supérieure

**Exercice 16** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Démontrer les propriétés suivantes

(a) Si  $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$  (resp.  $l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ ), alors  $(u_n)$  admet une sous-suite qui converge vers  $l$ .

(b)  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(c) La suite  $(u_n)$  converge vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  ssi  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .

(d)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ .

**Exercice 17** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Démontrer les propositions suivantes.

(a) Si pour tout  $n \geq 0$ , on a  $a_n \leq b_n$  alors  $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$  et  $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$ .

(b) Si la quantité  $\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$  existe, alors  $\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n \leq \underline{\lim} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ .

Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.

(c) Si la suite  $(a_n)$  converge vers  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\underline{\lim} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim} b_n$  et  $\overline{\lim} (a_n + b_n) = a + \overline{\lim} b_n$ .

**Exercice 18** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sqrt{n+1} - E(\sqrt{n})$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Montrer que  $\underline{\lim}(u_n) = 0$  et  $\overline{\lim}(u_n) = 1$ .

**Exercice 19** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\overline{\mathbb{R}}$  et  $L \in \overline{\mathbb{R}}$ . Montrer que  $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(a)  $\forall \lambda > L, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \lambda$  et (b)  $\forall \lambda < L, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq \lambda$ .

Trouver une formulation du même type pour  $L = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 20** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Un point  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  est une *valeur d'adhérence* de  $(u_n)$  si  $(u_n)$  possède une sous-suite qui converge vers  $a$ . Montrer que l'ensemble  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)$  est non vide et vérifie  $\sup A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$  et  $\inf A = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Exercice 21** Soit  $(u_n)$  une suite bornée de  $\mathbb{R}$ , et  $(v_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 0$  par  $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$  (*moyenne arithmétique de  $u_1 \dots u_n$* ). Montrer que  $\underline{\lim}(u_n) \leq \underline{\lim}(v_n) \leq \overline{\lim} v_n \leq \overline{\lim} u_n$ . En déduire que si  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors  $(v_n)$  aussi. Mêmes questions si tous les  $u_n$  sont strictement positifs avec  $w_n = \sqrt[n]{u_1 \dots u_n}$  (*moyenne géométrique*).

**Exercice 22** Soit  $q > 0$  un entier pair,  $n \geq 0$ ,  $u_n = \sin \frac{n\pi}{q}$  et  $(v_n)$  une suite réelle convergente.

(a) Déterminer l'ensemble  $A_q$  des valeurs d'adhérence de la suite  $s_n = u_n v_n$ .

(b) Trouver les limites supérieure et inférieure de  $s_n$ .

(c) Discuter les questions ci-dessus si  $(v_n)$  ne converge pas.